วิธีของฮวนสำหรับวิธีเรกกูลาไรเซชันเชิงกำกับแบบปรับปรุงของปัญหาอิลล์โพสแบบไม่เชิงเส้น

โดย

นางสาวชนาภัทร์ สุทธิพันธ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2561

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

วิธีของฮวนสำหรับวิธีเรกกูลาไรเซชันเชิงกำกับแบบปรับปรุงของปัญหาอิลล์โพสแบบไม่เชิงเส้น

โดย
นางสาวชนาภัทร์ สุทธิพันธ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2561
ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

HEUN'S METHOD FOR THE MODIFIED ASYMPTOTICAL REGULARIZATION OF NONLINEAR ILL-POSED PROBLEMS

By

MISS Chanapat SUTTIPAN

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for Master of Science (MATHEMATICS)

Department of MATHEMATICS

Graduate School, Silpakorn University

Academic Year 2018

Copyright of Graduate School, Silpakorn University

หัวข้อ	วิธีของฮวนสำหรับวิธีเรกกูลาไรเซชันเชิงกำกับแบบปรับปรุงของปัญหาอิลล์โพสแบบไม่เชิงเส้น
โดย	ชนาภัทร์ สุทธิพันธ์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พรทรัพย์ พรสวัสดิ์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

.... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร.จุไรรัตน์ นันทานิช)

พิจารณาเห็นชอบโดย

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. สืบสกุล อยู่ยืนยง)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พรทรัพย์ พรสวัสดิ์)

.... ผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วรินทร์ ศรีปัญญา)

มหาวิทยาลัยศิลปากร

57305208 : คณิตศาสตร์ แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต

นางสาว ชนาภัทร์ สุทธิพันธ์ : วิธีของฮวนสำหรับวิธีเรกกูลาไรเซชันเชิงกำกับแบบปรับปรุง ของปัญหาอิลล์โพสแบบไม่เชิงเส้น อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พรทรัพย์ พรสวัสดิ์

วิธีของฮวนสำหรับวิธีเรกกูลาไรเซชันเชิงกำกับแบบปรับปรุงของปัญหาอิลล์โพสแบบไม่เชิงเส้นเป็นวิธีที่ถูกพัฒนามาจากวิธีรุงเงอ-คุททาชัดแจ้งสำหรับการแก้สมการค่าเริ่มต้น

$$\dot{x}(t) = -F'(x(t))^*(F(x(t)) - y), x(0) = x_0$$

เมื่อ $F : D(F) \to Y$ และ $D(F) \subset X$ เป็นตัวดำเนินการไม่เชิงเส้นบนปริภูมิฮิลเบิร์ต H

ในวิทยานิพนธ์นี้จะนำเสนอการปรับปรุงวิธีเรกกูลาไรเซชันเชิงกำกับแบบปรับปรุงของปัญหาอิลล์โพสแบบไม่เชิงเส้น โดยนำวิธีของฮวนมาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการ ซึ่งเป็นวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยหลักของการคาดเดา และการปรับแก้ เพื่อให้ได้ผลเฉลยจากการประมาณที่มีความใกล้เคียงกับผลเฉลยของปัญหาไม่เชิงเส้นมากที่สุด

มหาวิทยาลัยศิลปากร

57305208 : MAJOR (MATHEMATICS)

MISS CHANAPAT SUTTIPAN : HEUN'S METHOD FOR THE MODIFIED ASYMPTOTICAL REGULARIZATION OF NONLINEAR ILL-POSED PROBLEMS THESIS ADVISOR : ASSISTANT PROFESSOR PORNSARP PORNSAWAD

Heun's Method for the Modified Asymptotical Regularization of Nonlinear Ill-Posed Problems developed by A Runge-Kutta type modified Landweber method for solving the initial value problem

$$\dot{x}(t) = -F'(x(t))^*(F(x(t)) - y), x(0) = x_0$$

where $F : D(F) \to Y$ is nonlinear operator with domain $D(F) \subset X$ and X, Y are Hilbert spaces.

In this paper we investigate to improve the method of the Modified Asymptotical Regularization of Nonlinear Ill-Posed Problems by Heun's Method. Used for the effeets of equations. This is a method of finding derivative equations with the master of prediction and correction to get a results from the estimate of the most nonlinear equation.

มหาวิทยาลัยศิลปากร

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะไม่สามารถสำเร็จลุล่วงไปได้หากผู้วิจัยไม่ได้รับความกรุณาจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พรทรัพย์ พรสวัสดิ์ อาจารย์ที่ปรึกษา ที่คอยให้ความรู้ ให้ความช่วยเหลือ ให้คำปรึกษา คำแนะนำ ตลอดจนช่วยชี้แนะข้อบกพร่องต่าง ๆ ช่วยแก้ไข มีความอดทนและกรุณาสละเวลากับผู้วิจัยอยู่เสมอ จนวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วง ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอขอบพระคุณอาจารย์เป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.สืบสกุล อยู่ยืนยง ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วรินทร์ ศรีปัญญา กรรมการผู้ทรงคุณวุฒิ สำหรับความกรุณาแสดงความคิดเห็น และให้คำแนะนำจนโครงการวิทยานิพนธ์นี้เสร็จสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณ คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากรทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ จนข้าพเจ้าสามารถนำความรู้เหล่านั้นมาปรับใช้ และก่อให้เกิดประโยชน์ในทางที่ถูกต้องในโครงการวิทยานิพนธ์นี้

ขอขอบพระคุณ ศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์ (CEM) สำหรับทุนสนับสนุนงานวิจัย

ขอขอบคุณเพื่อน ๆ ที่ค่อยให้กำลังใจ ความช่วยเหลือ และมิตรภาพอันดีงามเสมอมา

ขอขอบพระคุณเจ้าของเอกสารและงานวิจัยทุกท่าน ที่ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าและนำมาอ้างอิงจนกระทั่งวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณครอบครัวที่คอยเป็นกำลังใจ ให้การสนันสนุน และให้โอกาสทางการศึกษาอันมีค่ายิ่ง จนทำให้โครงการวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยดี

ชนาภัทร์ สุทธิพันธ์

มหาวิทยาลัยศิลปากร

สารบัญ

หน้า

มหาวิทยาลัยศิลปากร

รายการสัญลักษณ์

δ	ระดับของสัญญาณรบกวน (noise level)
δ^+	ค่าคลาดเคลื่อนที่สอดคล้องกับหลักความแตกต่าง
y^δ	ข้อมูลที่มีความคลาดเคลื่อน
k_*	ค่าเรกกูลาไรเซชันพารามิเตอร์
α_k	ค่าพารามิเตอร์สอดคล้องกับ (2.1)
τ	จำนวนจริงบวกสอดคล้องกับ (2.10)
$\bar{x}$	ผลเฉลยของ (1.4)
$x^\dagger$	ผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวของ (1.14) ที่มีระยะห่างจาก $\bar{x}$ น้อยที่สุด
$F'(\cdot)^*$	ตัวดำเนินการผูกพันของอนุพันธ์เฟรเชท

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัญหาที่เกิดขึ้นในทางคณิตศาสตร์สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภทคือ ปัญหาโดยตรง (direct problem) และปัญหาผกผัน (inverse problem) พิจารณาสมการความร้อน (heat equation) ต่อไปนี้
ให้ $\varphi \in L^2([0,1])$ ต้องการหา $g(x) = u(x,T), \ \ T > 0$ โดยที่ $u : [0,1] \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ สอดคล้องกับ

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \triangle u(x,t), \qquad x \in (0,1), \ \ t \in (0,T), \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T], \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,1] \tag{1.3}$$

โดยที่ φ คืออุณหภูมิที่เวลา $t = 0$ บนช่วง [0,1] สำหรับปัญหาโดยตรงจะกำหนดอุณหภูมิที่เวลา $t = 0$ และต้องการหาอุณหภูมิที่เวลา $t = T$ แต่ปัญหาผกผันจะตรงกันข้ามคือต้องการหาอุณหภูมิเริ่มต้น ซึ่งสอดคล้องกับอุณหภูมิที่เวลา $t = T$ เพราะฉะนั้นปัญหาผกผันจะเขียนได้ดังนี้ ให้ $g \in L^2([0,1])$ หา $\varphi \in L^2([0,1])$ ซึ่ง $u(\cdot,T) = g$ และ u สอดคล้องกับสมการ (1.1) - (1.3)

สังเกตว่าปัญหาโดยตรงดังกล่าวมีคุณสมบัติของปัญหาเวลล์โพส (well-post problem) ตามคำจำกัดความของ Hadamard [1] ปัญหาเวลล์โพสเป็นปัญหาที่มีผลเฉลย (existence) ผลเฉลยของปัญหามีเพียงหนึ่งเดียว (uniqueness) และผลเฉลยของปัญหาเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยเมื่อข้อมูลมีการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อย (stability) ส่วนปัญหาผกผันโดยทั่วไปไม่สามารถแก้ปัญหาได้โดยวิธีเดียวกับปัญหาเวลล์โพสได้ ปัญหาผกผันนั้นมักจะขาดคุณสมบัติข้อใดข้อหนึ่งของปัญหาเวลล์โพส ซึ่งเราจะเรียกปัญหานี้ว่า ปัญหาอิลล์โพส (ill-posed problem) ปัญหาอิลล์โพสมักพบเห็นบ่อยครั้งจากปัญหาที่เกี่ยวข้องกับข้อมูลที่เกิดจากกระบวนการทางวิทยาศาสตร์ ได้แก่ การชั่ง การตวง การวัด เป็นต้น ซึ่งข้อมูลจะมีสัญญาณรบกวนและส่งผลให้ขาดสมบัติข้อ 3 ของปัญหาเวลล์โพส

ปัญหาอิลล์โพสแบบไม่เชิงเส้นเขียนได้ในรูป

$$F(x) = y \tag{1.4}$$

โดยที่ $F : D(F) \subset X \to Y$ เป็นตัวดำเนินการแบบไม่เชิงเส้น เมื่อ X และ Y เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตที่สอดคล้องกับผลคูณภายใน $\langle \cdot, \cdot \rangle$ และนอร์ม $\| \cdot \|$ ตามลำดับ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะละตัวห้อยที่แสดงปริภูมิของผลคูณภายในและนอร์ม แต่สามารถทราบได้จากเวกเตอร์ที่แสดงภายในผลคูณภายในและนอร์ม

ในกระบวนการทางวิทยาศาสตร์ ข้อมูล y มักมีสัญญาณรบกวนระดับ $\delta > 0$ ซึ่งจะเขียนแทนด้วย y^δ กล่าวคือ

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta \tag{1.5}$$

การแก้ปัญหาอิลล์โพสสำหรับสมการไม่เชิงเส้นภายใต้เงื่อนไข (1.5) ดังนั้นสามารถใช้วิธีในกลุ่มของวิธีเรกกูลาไรเซชัน (regularization method) ได้ อาทิเช่น การทำซ้ำแบบแลนด์เวเบอร์ (Landweber iteration) วิธีทิกโฮนอฟ (Tikhonov method) วิธีเรกกูลาไรเซชันเชิงกำกับ (Asymptotical regularization method) เป็นต้น

ในงานวิจัยของ Tautenhahn [5] ได้ศึกษาวิธีแลนด์เวเบอร์ในเวอร์ชันต่อเนื่อง ซึ่งนำเสนอในรูปสมการค่าเริ่มต้นดังต่อไปนี้

$$\dot{x}(t) = -F'(x(t))^*(F(x(t)) - y), \quad x(0) = x_0 \tag{1.6}$$

เมื่อค่าเริ่มต้น $x_0 \in X$ และ $F'(\cdot)^*$ คือตัวดำเนินการผูกพันของอนุพันธ์เฟร์เชท $F'(\cdot)$ บนปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยที่ $0 < t \leq T$ เมื่อค่าพารามิเตอร์ T กำหนดโดยหลักความแตกต่าง (discrepancy principle) ถ้าตัวดำเนินการ $G(x) = F'(x)^*[y^\delta - F(x)]$ ต่อเนื่องแบบลิปชิทส์วงแคบ (locally Lipschitz continuous) สำหรับทุก $\bar{x}, \tilde{x} \in B_r(\bar{x}) \subset D(F)$ ซึ่ง

$$\|F(\tilde{x}) - F(x) - F'(x)(\tilde{x} - x)\| \leqslant \eta \|F(x) - F(\tilde{x})\|, \quad \eta < 1$$

ทำให้ได้ว่า

1. $x(T) \longrightarrow x^\dagger$ เมื่อ $T \longrightarrow \infty$
2. $x^\delta(T^*) \longrightarrow x^\dagger$ เมื่อ $\delta \longrightarrow 0$

และสำหรับทุก $x \in B_r(\bar{x})$ จะมีตัวดำเนินการเชิงเส้นแบบมีขอบเขต $R_x : Y \longrightarrow Y$ และค่าคงที่ $C \geq 0$ ซึ่ง

$$F'(x) = R_x F'(x^\dagger) \;\; \text{และ} \;\; \|R_x - I\| \leq C\|x - x^\dagger\|$$

โดยที่ $x^\dagger$ เป็นผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวของ (1.4) ที่มีระยะห่างจาก $\bar{x}$ น้อยที่สุดและนอกจากนี้

$$\|x^\delta(T^* - x^\dagger)\| \le cE^{1/(2\gamma+1)}\delta^{2\gamma/(2\gamma+1)} \tag{1.7}$$

ถ้า $\bar{x} - x^\dagger$ สอดคล้องเงื่อนไข

$$\bar{x} - x^\dagger = (F'(x^\dagger)^* F'(x^\dagger))^\gamma \nu, \quad \nu \in X, 2\gamma \in (0,1]$$

โดยค่าคงที่ $\|\nu\| \le E$ มีขนาดเล็กเพียงพอ และค่าคงที่ c เป็นอิสระจาก δ ต่อมา Li และคณะ [2] ใช้วิธีรุงเงอ-คุททา (Runge-Kutta methods) อันดับสอง แก้ปัญหาเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้น (1.6) และได้เสนอวิธีแลนด์เวเบอร์ใหม่ เรียกว่าวิธีแลนด์เวเบอร์ชนิดอาร์เค (R-K type Landweber method)

$$\begin{aligned} x_{k+1}^\delta =& x_k^\delta - F'(x_k^\delta - \frac{1}{2}F'(x_k^\delta)^*(F(x_k^\delta) - y^\delta))^*[F(x_k^\delta - \frac{1}{2}F'(x_k^\delta)^*(F(x_k^\delta) - y^\delta)) - y^\delta] \\ & k = 0, 1, \dots . \end{aligned} \tag{1.8}$$

ต่อมานันทวัน [7] ได้ศึกษาวิธีเรกกูลาไรเซชันเชิงกำกับแบบปรับปรุงของปัญหาอิลล์โพสแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งได้มีการเพิ่มพจน์ $-\alpha(t)(x^\delta(t) - \varsigma)$ ขึ้นมา โดยกำหนดให้ค่า $\alpha(t) = 1$ และให้ ς แทนด้วยค่าเริ่มต้น ซึ่งทำให้สมการ (1.6) เขียนได้ในรูป

$$\dot{x}^\delta(t) = F'(x^\delta(t))^*[y^\delta - F(x^\delta(t))] - (x^\delta(t) - \bar{x}), \quad 0 < t \le T, \quad x^\delta(0) = \bar{x} \tag{1.9}$$

โดยที่ $F : D(F) \subset X \to Y$ เป็นตัวดำเนินการแบบไม่เชิงเส้น เมื่อ X และ Y เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยเลือก T ได้จากวิธีหลักความแตกต่าง สำหรับกรณี $\delta = 0$ พิจารณา

$$\dot{x}(t) = F'(x(t))^*[y - F(x(t))] - (x(t) - \bar{x}), \quad 0 < t \le T, \quad x(0) = \bar{x} \tag{1.10}$$

เมื่อ T เป็นจำนวนจริงบวก

สังเกตว่าถ้าใช้วิธีรุงเงอ-คุททาแบบชัดแจ้ง (An explicit Runge–Kutta method) ในการแก้ปัญหาเชิงตัวเลข (1.9) จะได้สมการการทำซ้ำดังนี้

$$\begin{aligned} x_{k+1}^\delta &= x_k^\delta - F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta) - \alpha_k(z_k^\delta - \varsigma), \\ z_k^\delta &= x_k^\delta - \frac{1}{2}F'(x_k^\delta)^*(F(x_k^\delta) - y^\delta) - \frac{1}{2}\alpha_k(x_k^\delta - \varsigma), \quad k = 0, 1, \dots . \end{aligned} \tag{1.11}$$

เมื่อ $x_0^\delta = x_0$ เรียกการทำซ้ำนี้ว่าวิธีแลนด์เวเบอร์ชนิดอาร์-เค แบบปรับปรุง (R–K type modified Landweber method) [6] ซึ่งนำเสนอโดย Wang และคณะ ซึ่งได้พิสูจน์แล้วว่า วิธีแลนด์เวเบอร์

ชนิดอาร์-เค แบบปรับปรุง (1.11) ลู่เข้าและมีความเสถียร กล่าวคือ ถ้า α_k สอดคล้องกับ $0 \leqslant \alpha_k \leqslant \frac{1}{2}$ และ $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \infty$, F มีอนุพันธ์เฟอร์เชทที่มีขอบเขตแบบเอกรูปเฉพาะที่ (locally uniformly bounded Fréchet derivative)

$$\|F'(x)\| \leqslant L, \quad x \in B_\rho(x_0), \quad \text{เมื่อ } L < 1 \tag{1.12}$$

และ

$$\|F(x) - F(\tilde{x}) - F'(x)(x - \tilde{x})\| \leqslant \eta \|F(x) - F(\tilde{x})\|, \quad \eta < \frac{1}{2}, \tag{1.13}$$

$$x, \tilde{x} \in B_\rho(x_0) \subset D(F)$$

และ x_* เป็นผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น $F(x) = y$ ใน $B_{\rho/8}(x_0) \cap B_{\rho/8}(\varsigma)$ แล้ว x_k ลู่เข้าสู่ $x_* \in B_\rho(x_0)$ ยิ่งไปกว่านั้น ถ้าให้ $\varsigma = x_0$ และ $x^\dagger \in B_{\rho/8}(x_0)$ เป็นผลเฉลยเดียวของสมการ (1.4) ที่อยู่ใกล้ x_0 ที่สุด รวมทั้ง $N(F'(x^\dagger)) \subseteq N(F'(x))$ สำหรับทุก $x \in B_\rho(x_0)$ เป็นจริง แล้ว x_k ลู่เข้าสู่ $x^\dagger$

สำหรับกรณี $\delta \neq 0$ และ δ สอดคล้อง (1.5) ภายใต้สมมติฐานข้างต้นถ้าวิธีการทำซ้ำแบบแลนด์เวเบอร์ชนิดอาร์เค (1.11) หยุดที่ $k_*(\delta, y^\delta)$ ซึ่งสอดคล้องกฎการหยุดด้วยหลักความแตกต่าง

$$\|y^\delta - F(x^\delta_{k_*})\| \leqslant \tau\delta < \|y^\delta - F(x^\delta_k)\|, \quad 0 \leqslant k < k_* \tag{1.14}$$

เมื่อ τ สอดคล้องกับ

$$2(1-\alpha_k)(1-\eta) - \frac{2(1+\eta)}{\tau} - 2LC(L,\eta) - 5C^2(L,\eta) - 6L^2 \geqslant D > 0 \tag{1.15}$$

เมื่อ D เป็นค่าคงที่บวก และ $C(L,\eta) = (1-\eta)L/(2(1-\eta) - L^2)$ แล้วจะได้ว่า

$$\|x^\delta_{k+1} - x_*\| \leqslant (1-\alpha_k)\|x^\delta_k - x_*\| + \frac{3}{8}\alpha_k \rho$$

นอกจากนี้

$$x^\delta_{k_*(\delta, y^\delta)} \to x_* \quad \text{เมื่อ} \quad \delta \to 0$$

Wang และคณะ [6] เปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขระหว่างวิธีการทำซ้ำแบบแลนด์เวเบอร์แบบปรับปรุง (Modified Landweber iteration) กับวิธีแลนด์เวเบอร์ชนิดอาร์-เค แบบปรับปรุง สำหรับตัวดำเนินการไม่เชิงเส้น $F : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ ที่กำหนดโดย

$$x \longmapsto \int_0^s x(s-t)x(t)dt \tag{1.16}$$

พบว่า วิธีแลนด์เวเบอร์ชนิดอาร์-เค แบบปรับปรุง ใช้จำนวนรอบน้อยกว่าและให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่า ในขณะที่งานของนันทวัน [7] ได้มีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขเช่นเดียวกันโดยหาผลเฉลยของ $F(x) = y$ เมื่อตัวดำเนินการไม่เชิงเส้นกำหนดโดย

$$[F(x)](s) = \exp \int_0^1 k(s,t)x(t)dt \tag{1.17}$$

และข้อมูลที่มีค่าคลาดเคลื่อนกำหนดโดย $y^\delta = \exp((s^4 - 2s^3 + s)/12) + \delta \cos(100s), s \in [0,1]$ และฟังก์ชันเคอร์เนล (kernel function) ที่กำหนดโดย

$$k(s,t) = \begin{cases} s(1-t), & s < t \\ t(1-s), & t \leq s \end{cases}$$

ซึ่ง $\sup_{0 \leq k,s \leq 1} \mid k(s,t) \mid \leq 1$ และ F เป็นตัวดำเนินการไม่เชิงเส้นซึ่งสามารถหาอนุพันธ์เฟร์เชทโดยนันทวันใช้การประยุกต์วิธีผลต่างทางหน้า (Forward difference method) และ วิธีผลต่างศูนย์กลาง (Central difference method) เพื่อประมาณค่าอนุพันธ์แต่ผลลัพธ์ที่ได้นั้น ทำให้เห็นว่าผลเฉลยจริงและผลเฉลยโดยการประมาณยังมีความคลาดเคลื่อนอยู่มาก

เนื่องจากงานวิจัยของ นันทวัน ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะปรับปรุงวิธีการประมาณผลเฉลยซึ่งในโครงการวิทยานิพนธ์นี้ผู้วิจัยสนใจนำวิธีของฮวน (Heun's method) มาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการ (1.9) ซึ่งยังไม่มีผู้ใดนำเสนองานวิจัยเรื่องนี้มาก่อน โดยมีความคาดหวังว่าวิธีที่นำเสนอจะให้ผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ดีกว่าการหาผลเฉลยด้วยขั้นตอนเดียว (single step) ผู้วิจัยจึงทำการพิจารณาวิธีของฮวน ซึ่งเป็นการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยหลักของการคาดเดา (prediction) และการปรับแก้ (correction) ซึ่งมีรูปทั่วไปเขียนได้ดังนี้

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^{2} hb_j K_i \ , \quad h = 1 \tag{1.18}$$

เมื่อ

$$K_i = f(t_k + c_i h, x_k + a_{i1}K_1 + a_{i2}K_2) \ , \quad h = 1 \tag{1.19}$$

สำหรับวิธีของฮวนให้ $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$, $c_2 = a_{21} = 1$ และ $c_1 = a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ ทำให้ได้สมการคือ

$$x_{k+1}^\delta = \frac{1}{2}x_k^\delta + \frac{1}{2}z_k^\delta - \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta) - \frac{1}{2}\alpha_k(z_k^\delta - \varsigma) \tag{1.20}$$

$$z_k^\delta = x_k^\delta - F'(x_k^\delta)^*(F(x_k^\delta) - y^\delta) - \alpha_k(x_k^\delta - \varsigma), \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{1.21}$$

เมื่อ $x_0^\delta = x_0$ เรากล่าวว่า (1.21) เป็นผลเฉลยคาดเดาและ (1.20) เป็นการปรับแก้ค่าประมาณผลเฉลยให้ใกล้เคียงมากขึ้น

โดยผู้วิจัยศึกษาการลู่เข้าสู่ผลเฉลย และอัตราการลู่เข้าสู่ผลเฉลยของวิธี (1.20) สำหรับปัญหาอิลล์โพสแบบไม่เชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขบางประการ นอกจากนี้จะนำเสนอตัวอย่างเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหาอิลล์โพสสำหรับสมการแบบไม่เชิงเส้นโดยวิธีของฮวนสำหรับวิธีเรกกูลาไรเซชันเชิงกำกับแบบปรับปรุง

1.2 ขอบเขตการศึกษา

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะศึกษาปัญหาอิลล์โพสสำหรับตัวดำเนินการแบบไม่เชิงเส้นโดยประยุกต์วิธีของฮวนสำหรับวิธีเรกกูลาไรเซชันเชิงกำกับแบบปรับปรุงซึ่งนำเสนอโดยนันทวันและเลือกเรกกูลาไรเซชันพารามิเตอร์ด้วยวิธีหลักความแตกต่างของโมโรซอฟรวมทั้งพิจารณาเงื่อนไขของ Hölder สำหรับการคำนวณ optimal order นอกจากนี้ผู้วิจัยจะทดสอบการลู่เข้าของวิธีที่นำเสนอ โดยพิจารณาตัวดำเนินการไม่เชิงเส้น

$$[F(w)](s) = exp\int_0^1 k(s,t)w(t)dt$$

โดยที่ $F : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ เป็นตัวดำเนินการแบบไม่เชิงเส้น มีข้อมูลที่มีค่าคลาดเคลื่อน $g^\epsilon = exp((s^4 - 2s^3 + s)/12) + \epsilon cos(100s), s \in [0,1]$ และฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$k(s,t) = \begin{cases} s(1-t), & s < t \\ t(1-s), & t \leq s \end{cases}$$

ซึ่ง $sup_{0 \leq k, s \leq 1} \mid k(s,t) \mid \leq 1$

บทที่ 2
การวิเคราะห์การลู่เข้าสู่ผลเฉลย

ในบทนี้จะเป็นการวิเคราะห์การลู่เข้าของการทำซ้ำ (1.20) - (1.21) สำหรับวิธีเรกกูลาไรเซชันเชิงกำกับแบบปรับปรุงของปัญหาอิลล์โพสแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งจะพิจารณาเมื่อค่าพารามิเตอร์ α_k สอดคล้องเงื่อนไข

$$0.02 \leqslant \alpha_k \leqslant \frac{1}{4} \tag{2.1}$$

ก่อนที่จะกล่าวถึงการวิเคราะห์การลู่เข้าและความเสถียรของวิธีทำซ้ำ (1.20) - (1.21) เราจะแสดงเครื่องมือที่ช่วยวิเคราะห์การลู่เข้าที่เกี่ยวกับค่าสัมประสิทธิ์ α_k

บทตั้ง 2.1. [4] ให้ $k, l \in \mathbb{N}_0, l < k$ ถ้าค่า α_k สอดคล้องกับ $0 \leqslant \alpha_k \leqslant 1$ แล้ว

$$1 - \prod_{s=l}^{k}(1-\alpha_s) = \sum_{j=l}^{k} \alpha_j \prod_{s=j+1}^{k}(1-\alpha_s) \leqslant 1.$$

นอกจากนี้ ถ้า

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \infty \tag{2.2}$$

แล้ว

$$\prod_{k=l}^{\infty}(1-\alpha_k) \to 1 \quad \text{เมื่อ} \;\; l \to \infty \tag{2.3}$$

บทตั้ง 2.2. สมมติ x_* เป็นผลเฉลยของ (1.4) ใน $B_{\rho/8}(x_0) \cap B_{\rho/8}(\varsigma)$ ให้ F สอดคล้องกับ (1.12), (1.13) และ $0 < \alpha_k < \frac{1}{4}$ กำหนดให้ $z_k = \phi(x_k)$ เมื่อ

$$\phi(x) := x - F'(x)^*(F(x) - y) - \alpha(x - \varsigma) \tag{2.4}$$

ถ้า $x \in B_{\rho/2}(x_0)$ และ $\eta < 1 - 12L^2$ แล้ว $\phi(x) \in B_\rho(x_0)$

พิสูจน์

$$
\begin{aligned}
\|\phi(x)-x_0\|^2 &= \|x - F'(x)^*(F(x)-y) - \alpha(x-\varsigma) - x_0\|^2 \\
&= \|x - x_0 - F'(x)^*(F(x)-y) - \alpha(x-\varsigma)\|^2 \\
&= \|x-x_0\|^2 - 2\langle x-x_0, F'(x)^*(F(x)-y) + \alpha(x-\varsigma)\rangle \\
&\quad + \|F'(x)^*(F(x)-y) + \alpha(x-\varsigma)\|^2 \\
&\leqslant \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 + 2\|x-x_0\|\|F'(x)^*(F(x)-y) + \alpha(x-\varsigma)\| \\
&\quad + L^2\|F(x)-y\|^2 + \alpha^2\|x-\varsigma\|^2 + 2\langle F'(x)^*(F(x)-y), \alpha(x-\varsigma)\rangle \\
&\leqslant \frac{\rho^2}{4} + 2\frac{\rho}{2}[L\|F(x)-y\| + \alpha\|x-\varsigma\|] + L^2\|F(x)-y\|^2 \\
&\quad + \alpha^2\|x-\varsigma\|^2 + 2L\alpha\|F(x)-y\|\|x-\varsigma\| \\
&= \frac{\rho^2}{4} + L^2\|F(x)-y\|^2 + \alpha^2\|x-\varsigma\|^2 \\
&\quad + 2\frac{\rho}{2}L\|F(x)-y\| + 2\frac{\rho}{2}\alpha\|x-\varsigma\| + 2L\alpha\|F(x)-y\|\|x-\varsigma\| \\
&= \left[\frac{\rho}{2} + L\|F(x)-y\| + \alpha\|x-\varsigma\|\right]^2 \\
&\leqslant \left[\frac{\rho}{2} + L\frac{3L}{2(1-\eta)}\rho + \alpha\left(\frac{3\rho}{4}\right)\right]^2 \\
&= \left[\frac{\rho}{2} + \frac{3L^2}{2(1-\eta)}\rho + \frac{3}{4}\alpha\rho\right]^2
\end{aligned}
$$

นั้นคือ

$$
\|\phi(x)-x_0\| \leqslant \frac{\rho}{2} + \frac{3L^2}{2(1-\eta)}\rho + \frac{3}{4}\alpha\rho \leqslant \rho
$$

หมายเหตุ 2.3. คุณสมบัติ (1.12) และ (1.13) ยังคงเป็นจริง สำหรับ $\phi(x)$ ถ้า $\phi(x) \in B_\rho(x_0)$ ดังนั้นถ้า $x_k^\delta \in B_{\rho/2}(x_0)$ คุณสมบัติ (1.12) และ (1.13) ก็ยังคงเป็นจริง เมื่อนำมาใช้กับ z_k^δ เช่นเดียวกัน

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทถัดไปจำเป็นต้องพิจารณาความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้ อันดับแรกพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง $\|y^\delta - F(z_k^\delta)\|$ และ $\|y^\delta - F(x_k^\delta)\|$ โดย (1.13) และ (1.21) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|F(z_k^\delta) - F(x_k^\delta)\| &\leqslant \frac{1}{1-\eta}\|F'(z_k^\delta)(z_k^\delta - x_k^\delta)\| \\
&\leqslant \frac{1}{1-\eta}\|F'(z_k^\delta)\|\|z_k^\delta - x_k^\delta\| \\
&\leqslant \frac{L}{1-\eta}\|z_k^\delta - x_k^\delta\| \\
&\leqslant \frac{L}{1-\eta}\|-F'(x_k^\delta)^*(F(x_k^\delta) - y^\delta) - \alpha_k(x_k^\delta - \varsigma)\| \\
&\leqslant \frac{L}{1-\eta}\|F'(x_k^\delta)^*\|\|F(x_k^\delta) - y^\delta\| + \frac{L}{1-\eta}\alpha_k\|x_k^\delta - \varsigma\| \\
&\leqslant \frac{L}{1-\eta}L\|F(x_k^\delta) - y^\delta\| + \frac{L}{1-\eta}\alpha_k\|x_k^\delta - \varsigma\| \\
&\leqslant \frac{L^2}{1-\eta}\|F(x_k^\delta) - y^\delta\| + \frac{L}{1-\eta}\alpha_k\|x_k^\delta - \varsigma\| \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\|F(z_k^\delta) - F(x_k^\delta)\| \leqslant \frac{L}{1-\eta}\|z_k^\delta - x_k^\delta\| \leqslant \frac{L^2}{1-\eta}\|F(x_k^\delta) - y^\delta\| + \frac{L}{1-\eta}\alpha_k\|x_k^\delta - \varsigma\| \qquad (2.6)$$

ดังนั้นถ้า $\eta < 1 - L^2$ โดย $\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| - \|F(x_k^\delta) - y^\delta\| \leqslant \|F(z_k^\delta) - F(x_k^\delta)\|$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|z_k^\delta - x_k^\delta\| &\leqslant \|-F'(x_k^\delta)^*(F(x_k^\delta) - y^\delta) - \alpha_k(x_k^\delta - \varsigma)\| \\
&\leqslant \|-F'(x_k^\delta)^*\|\|F(x_k^\delta) - y^\delta\| + \alpha_k\|x_k^\delta - \varsigma\| \\
&\leqslant L\|F(x_k^\delta) - y^\delta\| + \alpha_k\|x_k^\delta - \varsigma\| \\
&\leqslant L\|F(x_k^\delta) - F(z_k^\delta) + F(z_k^\delta) - y^\delta\| + \alpha_k\|x_k^\delta - \varsigma\| \\
&\leqslant L\|F(x_k^\delta) - F(z_k^\delta)\| + L\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| + \alpha_k\|x_k^\delta - \varsigma\| \\
&\leqslant \frac{L}{1-\eta}\|F'(x_k^\delta)(x_k^\delta - z_k^\delta)\| + L\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| + \alpha_k\|x_k^\delta - \varsigma\| \\
&\leqslant \frac{L}{1-\eta}\|F'(x_k^\delta)\|\|x_k^\delta - z_k^\delta\| + L\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| + \alpha_k\|x_k^\delta - \varsigma\| \\
&\leqslant \frac{L^2}{1-\eta}\|x_k^\delta - z_k^\delta\| + L\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| + \alpha_k\|x_k^\delta - \varsigma\|
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
\left(1-\frac{L^2}{1-\eta}\right)\|z_k^\delta - x_k^\delta\| &\leqslant L\|F(z_k^\delta)-y^\delta\| + \alpha_k\|x_k^\delta - \varsigma\| \\
\|z_k^\delta - x_k^\delta\| &\leqslant \frac{1-\eta}{(1-\eta)-L^2}L\|F(z_k^\delta)-y^\delta\| + \frac{1-\eta}{(1-\eta)-L^2}\alpha_k\|x_k^\delta - \varsigma\| \\
\|z_k^\delta - x_k^\delta\| &\leqslant C(L,\eta)L\|F(z_k^\delta)-y^\delta\| + C(L,\eta)\alpha_k\|x_k^\delta - \varsigma\| \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

เมื่อ $C(L,\eta) = (1-\eta)/((1-\eta)-L^2)$ และจาก $\|F(x_k^\delta)-y^\delta\| - \|F(z_k^\delta)-y^\delta\| \leqslant \|F(x_k^\delta)-F(z_k^\delta)\|$ ยังทำให้ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\|F(x_k^\delta)-y^\delta\| &\leqslant \left(\frac{L^2}{(1-\eta)-L^2}+1\right)\|F(z_k^\delta)-y^\delta\| + \frac{l\alpha_k}{(1-\eta)-L^2}\|x_k^\delta - \varsigma\| \\
&\leqslant C(L,\eta)\|F(z_k^\delta)-y^\delta\| + C(L,\eta)\frac{L\alpha_k}{1-\eta}\|x_k^\delta - \varsigma\| \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

และให้

$$
\begin{aligned}
\psi(x_k^\delta) &= (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(x_k^\delta - x_*) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha_k)(z_k^\delta - x_k^\delta) \\
&= \frac{1}{2}(z_k^\delta - x_*)(1-\alpha_k) + \frac{1}{2}(x_k^\delta - x_*)
\end{aligned}
$$

ลำดับต่อไปคือการพิสูจน์ว่าค่าคลาดเคลื่อนของการทำซ้ำ (1.20) ลดลงทางเดียว

ทฤษฎีบท 2.4. ให้สมมติฐานของบทตั้ง 2.2 เป็นจริง และสำหรับ $0 \leqslant k < k_*$ ดัชนี $k_*(\delta)$ กำหนดด้วยหลักความแตกต่าง

$$
\|y^\delta - F(z_{k_*}^\delta)\| \leqslant \tau\delta^+ < \|y^\delta - F(z_k^\delta)\|, \quad 0 \leqslant k < k_* \qquad (2.9)
$$

เมื่อ $\left(\frac{E}{(1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)}+\delta\right) < \delta^\dagger$ และ τ สอดคล้องกับ

$$
B - \frac{(1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)}{\tau} \geqslant H > 0 \qquad (2.10)
$$

เมื่อ H เป็นค่าคงที่บวก และ
$B := (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(1-\eta) - \frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta)L^2 - \frac{1}{2}(1+\eta)C(L,\eta) - \frac{1}{2}(1+\eta) - \frac{L^2}{2}$
$- \frac{1}{4}L\alpha_kC^2(L,\eta)(1-\alpha_k)^2 - \frac{1}{2}\beta_k(1-\alpha_k)C(L,\eta)L - \frac{1}{4}(1+\eta)L\frac{\alpha_k}{1-\eta}C(L,\eta)$,
$E := \frac{\rho}{16}L\alpha_kC^2(L,\eta)(1-\alpha_k)^2 + \frac{\rho}{16}L\alpha_kC(L,\eta)(1-\alpha_k) + \frac{\rho}{16}(1+\eta)L\frac{\alpha_k}{1-\eta}C(L,\eta)$
แล้วจะได้ว่า

$$
\|x_{k+1}^\delta - x_*\| \leqslant (1-\alpha_k)\|x_k^\delta - x_*\| + \frac{1}{4}\alpha_k\rho
$$

มหาวิทยาลัยศิลปากร

พิสูจน์ จาก (1.20) และ $x_* \in B_{\rho/8}(\varsigma)$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1}^\delta - x_*\|^2 &= \|\frac{1}{2}x_k^\delta + \frac{1}{2}z_k^\delta - \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta) - \frac{1}{2}\alpha_k(z_k^\delta - \varsigma) - x_*\|^2 \\
&= \|\frac{1}{2}x_k^\delta + \frac{1}{2}z_k^\delta - \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta) - \frac{1}{2}\alpha_k z_k^\delta + \frac{1}{2}\alpha_k\varsigma - x_*\|^2 \\
&= \|\frac{1}{2}x_k^\delta + \frac{1}{2}z_k^\delta - \frac{1}{2}\alpha_k z_k^\delta + \frac{1}{2}\alpha_k\varsigma - x_* - \alpha_k x_k^\delta + \alpha_k x_k^\delta - \alpha_k x_* \\
&\quad + \alpha_k x_* - \frac{1}{2}x_k^\delta + \frac{1}{2}x_k^\delta - \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta)\|^2 \\
&= \|(1-\alpha_k)(x_k^\delta - x_*) + (1-\alpha_k)(\frac{1}{2}z_k^\delta - \frac{1}{2}x_k^\delta) + \frac{1}{2}\alpha_k x_k^\delta + \frac{1}{2}\alpha_k\varsigma \\
&\quad - \alpha_k x_* - \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta)\|^2 \\
&= \|(1-\alpha_k)(x_k^\delta - x_*) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha_k)(z_k^\delta - x_k^\delta) + \frac{1}{2}\alpha_k x_k^\delta - \frac{1}{2}\alpha_k x_k^\delta \\
&\quad + \frac{1}{2}\alpha_k x_k^\delta + \frac{1}{2}\alpha_k\varsigma - \alpha_k x_* - \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta)\|^2 \\
&= \|(1-\alpha_k)(x_k^\delta - x_*) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha_k)(z_k^\delta - x_k^\delta) + \alpha_k x_k^\delta - \alpha_k x_* \\
&\quad - \frac{1}{2}\alpha_k x_k^\delta + \frac{1}{2}\alpha_k\varsigma - \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta)\|^2 \\
&= \|(1-\alpha_k)(x_k^\delta - x_*) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha_k)(z_k^\delta - x_k^\delta) + \alpha_k(x_k^\delta - x_*) \\
&\quad - \frac{1}{2}\alpha_k(x_k^\delta - \varsigma) - \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta)\|^2 \\
&= \|(x_k^\delta - x_*) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha_k)(z_k^\delta - x_k^\delta) - \frac{1}{2}\alpha_k(x_k^\delta - \varsigma) \\
&\quad - \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta)\|^2 \\
&= \|(x_k^\delta - x_*) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha_k)(z_k^\delta - x_k^\delta) - \frac{1}{2}\alpha_k(x_k^\delta - x_*) \\
&\quad - \frac{1}{2}\alpha_k(x_* - \varsigma) - \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta)\|^2 \\
&= \|(1 - \frac{1}{2}\alpha_k)(x_k^\delta - x_*) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha_k)(z_k^\delta - x_k^\delta) - \frac{1}{2}\alpha_k(x_* - \varsigma) \\
&\quad - \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta)\|^2 \\
&= \|\psi(x_k^\delta) - \frac{1}{2}\alpha_k(x_* - \varsigma) - \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta)\|^2 \\
&= \|\psi(x_k^\delta) - \left[\frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta) + \frac{1}{2}\alpha_k(x_* - \varsigma)\right]\|^2 \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \|\frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta) + \frac{1}{2}\alpha_k(x_* - \varsigma)\|^2 \\
&\quad - 2\left\langle \psi(x_k^\delta), \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta) + \frac{1}{2}\alpha_k(x_* - \varsigma)\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \|\frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta) + \frac{1}{2}\alpha_k(x_*-\varsigma)\|^2 \\
&\quad - 2\left\langle \psi(x_k^\delta), \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta)\right\rangle - 2\left\langle \psi(x_k^\delta), \frac{1}{2}\alpha_k(x_*-\varsigma)\right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \|\frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta) - \frac{1}{2}\alpha_k(\varsigma-x_*)\|^2 \\
&\quad - 2\left\langle (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(x_k^\delta-x_*) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha_k)(z_k^\delta-x_k^\delta), \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta)\right\rangle \\
&\quad - 2\left\langle \psi(x_k^\delta), \frac{1}{2}\alpha_k(x_*-\varsigma)\right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \|\frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta)\|^2 + \|\frac{1}{2}\alpha_k(\varsigma-x_*)\|^2 \\
&\quad - 2\left\langle \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta), \frac{1}{2}\alpha_k(\varsigma-x_*)\right\rangle \\
&\quad - 2\left\langle (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(x_k^\delta-x_*) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha_k)(z_k^\delta-x_k^\delta), \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta)\right\rangle \\
&\quad - 2\left\langle \psi(x_k^\delta), \frac{1}{2}\alpha_k(x_*-\varsigma)\right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{1}{4}\|F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta)\|^2 + \frac{1}{4}\alpha_k^2\|\varsigma-x_*\|^2 \\
&\quad - 2\left\langle (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(x_k^\delta-x_*) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha_k)(z_k^\delta-x_k^\delta), \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta)\right\rangle \\
&\quad + 2\|\frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta)\|\|\frac{1}{2}\alpha_k(\varsigma-x_*)\| - 2\left\langle \psi(x_k^\delta), \frac{1}{2}\alpha_k(x_*-\varsigma)\right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{1}{4}\|F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta)\|^2 + \frac{1}{4}\alpha_k^2\|\varsigma-x_*\|^2 \\
&\quad - \left\langle (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(x_k^\delta-x_*) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha_k)(z_k^\delta-x_k^\delta), F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta)\right\rangle \\
&\quad + 2\|\frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta)\|\|\frac{1}{2}\alpha_k(\varsigma-x_*)\| - \alpha_k\left\langle \psi(x_k^\delta), x_*-\varsigma\right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{1}{4}\|F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta)\|^2 + \frac{1}{4}\alpha_k^2\|\varsigma-x_*\|^2 \\
&\quad - \left\langle (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(x_k^\delta-x_*) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha_k)(z_k^\delta-x_k^\delta), F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta)\right\rangle \\
&\quad + \|\frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta)\|^2 + \|\frac{1}{2}\alpha_k(\varsigma-x_*)\|^2 + \alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\|\|x_*-\varsigma\| \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{1}{2}\|F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta)\|^2 + \alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\|\|x_*-\varsigma\| + \frac{1}{2}\alpha_k^2\|\varsigma-x_*\|^2 \\
&\quad - \left\langle (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(x_k^\delta-x_*) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha_k)(z_k^\delta-x_k^\delta), F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta)\right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{1}{2}\|F'(z_k^\delta)^*\|^2\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|^2 + \alpha_k(\frac{\rho}{8})\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{1}{2}\alpha_k^2(\frac{\rho}{8})^2 \\
&\quad - \left\langle (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(x_k^\delta-x_*) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha_k)(z_k^\delta-x_k^\delta), F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta)-y^\delta)\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 \\
&\quad - \left\langle (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)(x_k^\delta - x_*), F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta) \right\rangle \\
&\quad - \left\langle (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha_k)(z_k^\delta - x_k^\delta), F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta) \right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 \\
&\quad - (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\left\langle F'(z_k^\delta)(x_k^\delta - x_*), F(z_k^\delta) - y^\delta) \right\rangle \\
&\quad - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha_k)\left\langle z_k^\delta - x_k^\delta, F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta) \right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&\quad - (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\left\langle F'(z_k^\delta)(z_k^\delta - x_*) - F'(z_k^\delta)(z_k^\delta - x_k^\delta), F(z_k^\delta) - y^\delta) \right\rangle \\
&\quad - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha_k)\left\langle z_k^\delta - x_k^\delta, F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta) \right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&\quad - (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\left\langle F'(z_k^\delta)(z_k^\delta - x_*), F(z_k^\delta) - y^\delta \right\rangle \\
&\quad + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\left\langle F'(z_k^\delta)(z_k^\delta - x_k^\delta), F(z_k^\delta) - y^\delta \right\rangle \\
&\quad - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha_k)\left\langle z_k^\delta - x_k^\delta, F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta) \right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&\quad - (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\left\langle F'(z_k^\delta)(z_k^\delta - x_*), F(z_k^\delta) - y^\delta \right\rangle \\
&\quad + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\left\langle F'(z_k^\delta)(z_k^\delta - x_k^\delta), F(z_k^\delta) - y^\delta \right\rangle \\
&\quad - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha_k)\left\langle F'(z_k^\delta)(z_k^\delta - x_k^\delta), F(z_k^\delta) - y^\delta \right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&\quad - (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\left\langle F'(z_k^\delta)(z_k^\delta - x_*), F(z_k^\delta) - y^\delta \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}\left\langle F'(z_k^\delta)(z_k^\delta - x_k^\delta), F(z_k^\delta) - y^\delta \right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&\quad - (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\left\langle F'(z_k^\delta)(z_k^\delta - x_*) - (F(z_k^\delta) - y^\delta) + (F(z_k^\delta) - y^\delta), F(z_k^\delta) - y^\delta \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}\left\langle z_k^\delta - x_k^\delta, F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta) \right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&\quad - (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\left\langle F'(z_k^\delta)(z_k^\delta - x_*) - (F(z_k^\delta) - y^\delta), F(z_k^\delta) - y^\delta\right\rangle \\
&\quad - (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\left\langle F(z_k^\delta) - y^\delta, F(z_k^\delta) - y^\delta\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle z_k^\delta - x_k^\delta, F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta)\right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&\quad + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\left\langle F(z_k^\delta) - y^\delta - F'(z_k^\delta)(z_k^\delta - x_*), F(z_k^\delta) - y^\delta\right\rangle \\
&\quad - (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 + \frac{1}{2}\left\langle z_k^\delta - x_k^\delta, F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta)\right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&\quad + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\|(F(z_k^\delta) - y^\delta) - F'(z_k^\delta)(z_k^\delta - x_*)\|\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\
&\quad - (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 + \frac{1}{2}\left\langle z_k^\delta - x_k^\delta, F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta)\right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&\quad + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\|F(z_k^\delta) - F(x_*) - F'(z_k^\delta)(z_k^\delta - x_*) + F(x_*) - y^\delta\|\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\
&\quad - (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 + \frac{1}{2}\left\langle z_k^\delta - x_k^\delta, F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta)\right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&\quad + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\left[\eta\|F(z_k^\delta) - F(x_*)\| + \delta\right]\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\
&\quad - (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 + \frac{1}{2}\left\langle z_k^\delta - x_k^\delta, F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta)\right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&\quad + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\left[\eta\left(\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| + \|y^\delta - y\|\right) + \delta\right]\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\
&\quad - (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 + \frac{1}{2}\left\langle z_k^\delta - x_k^\delta, F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta)\right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&\quad + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\left[\eta\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| + \eta\delta + \delta\right]\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\
&\quad - (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 + \frac{1}{2}\left\langle z_k^\delta - x_k^\delta, F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta)\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&\quad + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\eta\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)(\eta + 1)\delta\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\
&\quad - (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 + \frac{1}{2}\left\langle z_k^\delta - x_k^\delta, F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta)\right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&\quad + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)(\eta - 1)\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)(\eta + 1)\delta\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\
&\quad + \frac{1}{2}\left\langle z_k^\delta - x_k^\delta, F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta)\right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&\quad + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)(\eta - 1)\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)(\eta + 1)\delta\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\
&\quad + \frac{1}{2}\left\langle F'(z_k^\delta)(z_k^\delta - x_k^\delta), F(z_k^\delta) - y^\delta\right\rangle \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&\quad + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)(\eta - 1)\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)(\eta + 1)\delta\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\
&\quad + \frac{1}{2}\|F'(z_k^\delta)(z_k^\delta - x_k^\delta)\|\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&\quad + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)(\eta - 1)\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)(\eta + 1)\delta\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\
&\quad + \frac{(1+\eta)}{2}\|F(z_k^\delta) - F(x_k^\delta)\|\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 + \frac{L^2}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&\quad + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)(\eta - 1)\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 + (1 - \frac{1}{2}\alpha_k)(\eta + 1)\delta\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\
&\quad + \frac{(1+\eta)}{2}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 + \frac{(1+\eta)}{2}\|F(x_k^\delta) - y^\delta\|\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

จาก (2.8) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\|\psi(x_k^\delta)\| &= \|\frac{1}{2}(z_k^\delta - x_*)(1-\alpha_k) + \frac{1}{2}(x_k^\delta - x_*)\| \\
&\leqslant (1-\alpha_k)\frac{1}{2}\|z_k^\delta - x_*\| + \frac{1}{2}\|x_k^\delta - x_*\| \\
&\leqslant (1-\alpha_k)\frac{1}{2}\|z_k^\delta - x_k^\delta\| + (1-\alpha_k)\frac{1}{2}\|x_k^\delta - x_*\| + \frac{1}{2}\|x_k^\delta - x_*\| \\
&\leqslant (1-\alpha_k)\frac{1}{2}\left[C(L,\eta)L\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| + C(L,\eta)\alpha_k\|x_k^\delta - \varsigma\|\right] \\
&\quad + (1-\alpha_k)\frac{1}{2}\|x_k^\delta - x_*\| + \frac{1}{2}\|x_k^\delta - x_*\| \\
&\leqslant (1-\alpha_k)\frac{1}{2}C(L,\eta)L\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| + (1-\alpha_k)\frac{1}{2}C(L,\eta)\alpha_k\|x_k^\delta - \varsigma\| \\
&\quad + \left[(1-\alpha_k)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right]\|x_k^\delta - x_*\| \\
&\leqslant (1-\alpha_k)\frac{1}{2}C(L,\eta)L\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| + (1-\alpha_k)\frac{1}{2}C(L,\eta)\alpha_k\|x_k^\delta - x_*\| \\
&\quad + (1-\alpha_k)\frac{1}{2}C(L,\eta)\alpha_k\|x_* - \varsigma\| + \left[(1-\alpha_k)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right]\|x_k^\delta - x_*\| \\
&\leqslant (1-\alpha_k)\frac{1}{2}C(L,\eta)L\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\
&\quad + \left[(1-\alpha_k)\frac{1}{2}C(L,\eta)\alpha_k + ((1-\alpha_k)\frac{1}{2} + \frac{1}{2})\right]\|x_k^\delta - x_*\| \\
&\quad + (1-\alpha_k)\frac{1}{2}C(L,\eta)\alpha_k\|x_* - \varsigma\| \\
&\leqslant \frac{1}{2}(1-\alpha_k)C(L,\eta)L\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\
&\quad + \left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)\alpha_k C(L,\eta) + (1-\alpha_k)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right]\|x_k^\delta - x_*\| \\
&\quad + \frac{1}{2}(1-\alpha_k)\alpha_k C(L,\eta)\|x_* - \varsigma\|
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

ลำดับต่อไปจะแทนค่า $\beta_k := \frac{1}{2}(1-\alpha_k) + \frac{1}{2}$ และจาก (2.1) ทำให้ได้ว่า $\beta_k \leqslant 1$ ในเทอมแรกด้านขวามือของสมการ (2.11) สามารถประมาณค่าได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\|\psi(x_k^\delta)\|^2 &= \|\frac{1}{2}(z_k^\delta - x_*)(1-\alpha_k) + \frac{1}{2}(x_k^\delta - x_*)\|^2 \\
&\leqslant \|\frac{1}{2}(z_k^\delta - x_*)(1-\alpha_k)\|^2 + \|\frac{1}{2}(x_k^\delta - x_*)\|^2 \\
&\quad + 2\left\langle \frac{1}{2}(z_k^\delta - x_*)(1-\alpha_k), \frac{1}{2}(x_k^\delta - x_*)\right\rangle \\
&\leqslant \frac{1}{4}\|z_k^\delta - x_*\|^2(1-\alpha_k)^2 + \frac{1}{4}\|x_k^\delta - x_*\|^2 \\
&\quad + \left\langle (z_k^\delta - x_*)(1-\alpha_k), \frac{1}{2}(x_k^\delta - x_*)\right\rangle \\
&\leqslant \frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2\|z_k^\delta - x_k^\delta\|^2 + \frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2\|x_k^\delta - x_*\|^2 \\
&\quad + 2\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2\left\langle z_k^\delta - x_k^\delta, x_k^\delta - x_*\right\rangle + \frac{1}{4}\|x_k^\delta - x_*\|^2 \\
&\quad + \|z_k^\delta - x_*\|(1-\alpha_k)\frac{1}{2}\|x_k^\delta - x_*\| \\
&\leqslant \frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2\|z_k^\delta - x_k^\delta\|^2 + \frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2\|x_k^\delta - x_*\|^2 \\
&\quad + 2\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2\left\langle z_k^\delta - x_k^\delta, x_k^\delta - x_*\right\rangle + \frac{1}{4}\|x_k^\delta - x_*\|^2 \\
&\quad + \|z_k^\delta - x_k^\delta\|(1-\alpha_k)\frac{1}{2}\|x_k^\delta - x_*\| + \|x_k^\delta - x_*\|(1-\alpha_k)\frac{1}{2}\|x_k^\delta - x_*\| \\
&\leqslant \frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2\|z_k^\delta - x_k^\delta\|^2 + \frac{1}{4}(1-\alpha_k)\|^2\|x_k^\delta - x_*\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2\|z_k^\delta - x_k^\delta\|\|x_k^\delta - x_*\| + \frac{1}{4}\|x_k^\delta - x_*\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(1-\alpha_k)\|z_k^\delta - x_k^\delta\|\|x_k^\delta - x_*\| + \frac{1}{2}(1-\alpha_k)\|x_k^\delta - x_*\|^2 \\
&\leqslant \frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2\|z_k^\delta - x_k^\delta\|^2 + \left[\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2 + \frac{1}{2}(1-\alpha_k) + \frac{1}{4}\right]\|x_k^\delta - x_*\|^2 \\
&\quad + \left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2 + \frac{1}{2}(1-\alpha_k)\right]\|z_k^\delta - x_k^\delta\|\|x_k^\delta - x_*\| \\
&\leqslant \frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2\|z_k^\delta - x_k^\delta\|^2 + \left[\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2 + \frac{1}{2}(1-\alpha_k) + \frac{1}{4}\right]\|x_k^\delta - x_*\|^2 \\
&\quad + \left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2 + \frac{1}{2}(1-\alpha_k)\right]\|x_k^\delta - x_*\|C(L,\eta)L\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\
&\quad + \left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2 + \frac{1}{2}(1-\alpha_k)\right]\|x_k^\delta - x_*\|C(L,\eta)\alpha_k\|\ x_k^\delta - \varsigma\|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta)L^2\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|^2+\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta)\alpha_k^2\|x_k^\delta-\varsigma\|^2\\
&\quad+2C^2(C,\eta)L\alpha_k\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|\|x_k^\delta-\varsigma\|\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2\\
&\quad+\left[\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2+\frac{1}{2}(1-\alpha_k)+\frac{1}{4}\right]\|x_k^\delta-x_*\|^2\\
&\quad+\left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2+\frac{1}{2}(1-\alpha_k)\right]C(L,\eta)L\|x_k^\delta-x_*\|\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|\\
&\quad+\left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2+\frac{1}{2}(1-\alpha_k)\right]C(L,\eta)\alpha_k\|x_k^\delta-x_*\|\|\ x_k^\delta-\varsigma\|\\
&\leqslant \frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta)L^2\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|^2\\
&\quad+\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta)\alpha_k^2\|x_k^\delta-x_*+x_*-\varsigma\|^2\\
&\quad+2C^2(L,\eta)L\alpha_k\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|\|x_k^\delta-x_*+x_*-\varsigma\|\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2\\
&\quad+\left[\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2+\frac{1}{2}(1-\alpha_k)+\frac{1}{4}\right]\|x_k^\delta-x_*\|^2\\
&\quad+\left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2+\frac{1}{2}(1-\alpha_k)\right]C(L,\eta)L\|x_k^\delta-x_*\|\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|\\
&\quad+\left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2+\frac{1}{2}(1-\alpha_k)\right]C(L,\eta)\alpha_k\|x_k^\delta-x_*\|\|\ x_k^\delta-x_*+x_*-\varsigma\|\\
&\leqslant \frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta)L^2\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|^2+\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta)\alpha_k^2\|x_k^\delta-x_*\|^2\\
&\quad+\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta)\alpha_k^2\|x_*-\varsigma\|^2\\
&\quad+\frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta)\alpha_k^2\|x_k^\delta-x_*\|\|x_*-\varsigma\|\\
&\quad+2\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2L\alpha_kC^2(L,\eta)\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|\|x_k^\delta-x_*\|\\
&\quad+2\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2L\alpha_kC^2(L,\eta)\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|\|x_*-\varsigma\|\\
&\quad+\left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)+\frac{1}{2}\right]^2\|x_k^\delta-x_*\|^2\\
&\quad+\left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2+\frac{1}{2}(1-\alpha_k)\right]C(L,\eta)L\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|\|x_k^\delta-x_*\|\\
&\quad+\left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2+\frac{1}{2}(1-\alpha_k)\right]C(L,\eta)\alpha_k\|x_k^\delta-x_*\|^2\\
&\quad+\left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2+\frac{1}{2}(1-\alpha_k)\right]C(L,\eta)\alpha_k\|x_k^\delta-x_*\|\|x_*-\varsigma\|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2 C^2(L,\eta) L^2 \|F(z_k^\delta)-y^\delta\|^2 \\
&\quad + \left[\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2 C^2(L,\eta)\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \beta_k(1-\alpha_k)C(L,\eta)\alpha_k\right]\|x_k^\delta - x_*\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}\frac{\rho^2}{64}(1-\alpha_k)^2 C^2(L,\eta)\alpha_k^2 + \frac{1}{2}\frac{\rho}{8}(1-\alpha_k)^2 C^2(L,\eta)\alpha_k^2\|x_k^\delta - x_*\| \\
&\quad + 2L\alpha_k C^2(L,\eta)\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|\|x_k^\delta - x_*\| \\
&\quad + 2\frac{\rho}{8}L\alpha_k C^2(L,\eta)\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2\|F(z_k^\delta)-y^\delta\| \\
&\quad + \beta_k(1-\alpha_k)C(L,\eta)L\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|\|x_k^\delta - x_*\| \\
&\quad + \beta_k(1-\alpha_k)C(L,\eta)\alpha_k\frac{\rho}{8}\|x_k^\delta - x_*\| \\
&\leqslant \frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2 C^2(L,\eta) L^2 \|F(z_k^\delta)-y^\delta\|^2 \\
&\quad + \left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)C(L,\eta)\alpha_k + \beta_k\right]^2\|x_k^\delta - x_*\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}\frac{\rho^2}{64}(1-\alpha_k)^2 C^2(L,\eta)\alpha_k^2 \\
&\quad + 2\frac{\rho}{8}L\alpha_k C^2(L,\eta)\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2\|F(z_k^\delta)-y^\delta\| \\
&\quad + \left[\frac{1}{2}\frac{\rho}{8}(1-\alpha_k)^2 C^2(L,\eta)\alpha_k^2 + \beta_k(1-\alpha_k)C(L,\eta)\alpha_k\frac{\rho}{8}\right]\|x_k^\delta - x_*\| \\
&\quad + \left[2L\alpha_k C^2(L,\eta)\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2 + \beta_k(1-\alpha_k)C(L,\eta)L\right]\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|\|x_k^\delta - x_*\|
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

จาก (2.11) - (2.13) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1}^\delta - x_*\|^2 \leqslant\ & \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 \\
& + \left[\frac{L^2}{2} + (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta-1) + \frac{1}{2}(1+\eta)\right]\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|^2 \\
& + (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)\delta\|F(z_k^\delta)-y^\delta\| \\
& + \frac{1}{2}(1+\eta)\|F(x_k^\delta)-y^\delta\|\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 \\
&\quad + \left[\frac{L^2}{2} + (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta-1) + \frac{1}{2}(1+\eta)\right]\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|^2 \\
&\quad + (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)\delta\|F(z_k^\delta)-y^\delta\| + \frac{1}{2}(1+\eta)\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|^2 C(L,\eta) \\
&\quad + \frac{1}{2}(1+\eta)\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|\|x_k^\delta-\varsigma\|C(L,\eta)L\frac{\alpha_k}{1-\eta} \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 \\
&\quad + \left[\frac{L^2}{2} + (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta-1) + \frac{1}{2}(1+\eta) + \frac{1}{2}(1+\eta)C(L,\eta)\right]\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|^2 \\
&\quad + (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)\delta\|F(z_k^\delta)-y^\delta\| \\
&\quad + \frac{1}{2}(1+\eta)\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|\|x_k^\delta-x_*\|C(L,\eta)L\frac{\alpha_k}{1-\eta} \\
&\quad + \frac{1}{2}(1+\eta)\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|\|x_*-\varsigma\|C(L,\eta)L\frac{\alpha_k}{1-\eta} \\
&\leqslant \|\psi(x_k^\delta)\|^2 + \frac{\rho}{8}\alpha_k\|\psi(x_k^\delta)\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 \\
&\quad + \left[\frac{L^2}{2} + (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta-1) + \frac{1}{2}(1+\eta) + \frac{1}{2}(1+\eta)C(L,\eta)\right]\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(1+\eta)C(L,\eta)L\frac{\alpha_k}{1-\eta}\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|\|x_k^\delta-x_*\| \\
&\quad + \left[(1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)\delta + \frac{1}{2}(1+\eta)L\frac{\alpha_k}{1-\eta}\frac{\rho}{8}C(L,\eta)\right]\|F(z_k^\delta)-y^\delta\| \\
&\leqslant \frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta)L^2\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|^2 \\
&\quad + \left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)C(L,\eta)\alpha_k + \beta_k\right]^2\|x_k^\delta-x_*\|^2 + \frac{\rho^2}{256}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta)\alpha_k^2 \\
&\quad + \left[\frac{\rho}{16}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta)\alpha_k^2 + \beta_k(1-\alpha_k)C(L,\eta)\alpha_k\frac{\rho}{8}\right]\|x_k^\delta-x_*\| \\
&\quad + \left[\frac{1}{2}L\alpha_kC^2(L,\eta)(1-\alpha_k)^2 + \beta_k(1-\alpha_k)C(L,\eta)L\right]\|F(z_k^\delta)-y^\delta\|\|x_k^\delta-x_*\| \\
&\quad + \frac{\rho}{16}L\alpha_kC^2(L,\eta)(1-\alpha_k)^2\|F(z_k^\delta)-y^\delta\| \\
&\quad + \frac{\rho}{8}\alpha_k\frac{1}{2}(1-\alpha_k)LC(L,\eta)\|F(z_k^\delta)-y^\delta\| \\
&\quad + \frac{\rho}{8}\alpha_k\left[\frac{1}{2}\alpha_k(1-\alpha_k)C(L,\eta) + \beta_k\right]\|x_k^\delta-x_*\|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{\rho}{8}\alpha_k \frac{1}{2}\alpha_k(1-\alpha_k)C(L,\eta)\|x_* - \varsigma\| + \frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 \\
&+ \left[\frac{L^2}{2} + (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta-1) + \frac{1}{2}(1+\eta) + \frac{1}{2}(1+\eta)C(L,\eta)\right]\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&+ \frac{1}{2}(1+\eta)C(L,\eta)L\frac{\alpha_k}{1-\eta}\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|\|x_k^\delta - x_*\| \\
&+ \left[(1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)\delta + \frac{1}{2}(1+\eta)L\frac{\alpha_k}{1-\eta}\frac{\rho}{8}C(L,\eta)\right]\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\
\leqslant\ & \left[\frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta)L^2 + \frac{1}{2}(1+\eta)C(L,\eta) + (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta-1) + \frac{1}{2}(1+\eta)\right. \\
&+ \frac{L^2}{2} + \frac{1}{4}L\alpha_kC^2(L,\eta)(1-\alpha_k)^2 + \frac{1}{2}\beta_k(1-\alpha_k)C(L,\eta)L \\
&\left.+ \frac{1}{4}(1+\eta)L\frac{\alpha_k}{1-\eta}C(L,\eta)\right]\|F(z_k^\delta) - y^\delta\|^2 \\
&+ \left[\frac{\rho}{16}L\alpha_kC^2(L,\eta)(1-\alpha_k)^2 + \frac{\rho}{16}L\alpha_kC(L,\eta)(1-\alpha_k) + (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)\delta\right. \\
&\left.+ \frac{\rho}{16}(1+\eta)L\frac{\alpha_k}{1-\eta}C(L,\eta)\right]\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\
&+ \left[(\frac{1}{2}(1-\alpha_k)C(L,\eta)\alpha_k + \beta_k)^2 + \frac{1}{4}\alpha_kLC^2(L,\eta)(1-\alpha_k)^2\right. \\
&\left.+ \frac{1}{2}\beta_k(1-\alpha_k)C(L,\eta)L + \frac{1}{4}(1+\eta)LC(L,\eta)\frac{\alpha_k}{1-\eta}\right]\|x_k^\delta - x_*\|^2 \\
&+ \left[\frac{\rho}{16}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta)\alpha_k^2 + \beta_k(1-\alpha_k)C(L,\eta)\alpha_k\frac{\rho}{8}\right. \\
&\left.+ \frac{\rho}{16}\alpha_k^2(1-\alpha_k)C(L,\eta) + \frac{\rho}{8}\alpha_k\beta_k\right]\|x_k^\delta - x_*\| \\
&+ \left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta) + (1-\alpha_k)C(L,\eta) + 1\right]\frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2
\end{aligned}
$$

ลำดับต่อไปจะแทนค่า $G := (1-\alpha_k)C(1,\eta) + 1$, $D := \frac{1}{2}(1-\alpha_k)\alpha_k + \beta_k$
และ $B := (1-\frac{1}{2}\alpha_k)(1-\eta) - \frac{1}{4}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta)L^2 - \frac{1}{2}(1+\eta)C(L,\eta) - \frac{1}{2}(1+\eta)$
$- \frac{L^2}{2} - \frac{1}{4}L\alpha_kC^2(L,\eta)(1-\alpha_k)^2 - \frac{1}{2}\beta_k(1-\alpha_k)C(L,\eta)L - \frac{1}{4}(1+\eta)L\frac{\alpha_k}{1-\eta}C(L,\eta)$,
$E := \frac{\rho}{16}L\alpha_kC^2(L,\eta)(1-\alpha_k)^2 + \frac{\rho}{16}L\alpha_kC(L,\eta)(1-\alpha_k) + \frac{\rho}{16}(1+\eta)L\frac{\alpha_k}{1-\eta}C(L,\eta)$

มหาวิทยาลัยศิลปากร

ทำให้ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1}^{\delta}-x_*\|^2 \leqslant{}& \left[E+(1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)\delta - B\|F(z_k^{\delta})-y^{\delta}\|\right]\|F(z_k^{\delta})-y^{\delta}\| \\
&+\left[D^2+\frac{1}{2}L(1-\alpha_k)C(L,\eta)D \right.\\
&\left.+\frac{1}{4}(1+\eta)LC(L,\eta)\frac{\alpha_k}{1-\eta}\right]\|x_k^{\delta}-x_*\|^2 \\
&+\left[\frac{\rho}{16}\alpha_k^2(1-\alpha_k)C(L,\eta)+\frac{\rho}{8}\alpha_k\beta_k\right]G\|x_k^{\delta}-x_*\| \\
&+\left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta)+G\right]\frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 \\
\leqslant{}& \left[\frac{E}{B}+\frac{(1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)\delta}{B}-\|F(z_k^{\delta})-y^{\delta}\|\right]B\|F(z_k^{\delta})-y^{\delta}\| \\
&+\left[D^2+\frac{1}{2}L(1-\alpha_k)C(L,\eta)D \right.\\
&\left.+\frac{1}{4}(1+\eta)LC(L,\eta)\frac{\alpha_k}{1-\eta}\right]\|x_k^{\delta}-x_*\|^2 \\
&+\left[\frac{\rho}{16}\alpha_k^2(1-\alpha_k)C(L,\eta)+\frac{\rho}{8}\alpha_k\beta_k\right]G\|x_k^{\delta}-x_*\| \\
&+\left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta)+G\right]\frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 \\
\leqslant{}& \left[\left(\frac{E}{(1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)}+\delta\right)\frac{(1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)}{B}\right.\\
&\left.-\|F(z_k^{\delta})-y^{\delta}\|\right]B\|F(z_k^{\delta})-y^{\delta}\| \\
&+\left[D^2+\frac{1}{2}L(1-\alpha_k)C(L,\eta)D \right.\\
&\left.+\frac{1}{4}(1+\eta)LC(L,\eta)\frac{\alpha_k}{1-\eta}\right]\|x_k^{\delta}-x_*\|^2 \\
&+\left[\frac{\rho}{16}\alpha_k^2(1-\alpha_k)C(L,\eta)+\frac{\rho}{8}\alpha_k\beta_k\right]G\|x_k^{\delta}-x_*\| \\
&+\left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta)+G\right]\frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

ให้ $\frac{(1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)}{B} < \tau$ และ $\left(\frac{E}{(1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)} + \delta\right) < \delta^\dagger$

$$\begin{aligned}\|x_{k+1}^\delta - x_*\|^2 \leqslant & \left[\tau\delta^\dagger - \|F(z_k^\delta) - y^\delta\|\right] B\|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \\ & + \left[D^2 + \frac{1}{2}L(1-\alpha_k)C(L,\eta)D \right. \\ & \left. + \frac{1}{4}(1+\eta)LC(L,\eta)\frac{\alpha_k}{1-\eta}\right]\|x_k^\delta - x_*\|^2 \\ & + \frac{\rho}{8}\alpha_k DG\|x_k^\delta - x_*\| + \left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta) + G\right]\frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

โดยหลักความแตกต่าง (2.9) สำหรับ $0 \leqslant k < k_*$ ทำให้สมการ (2.15) ได้เป็น

$$\begin{aligned}\|x_{k+1}^\delta - x_*\|^2 \leqslant & \left[D^2 + \frac{1}{2}L(1-\alpha_k)C(L,\eta)D + \frac{1}{4}(1+\eta)LC(L,\eta)\frac{\alpha_k}{1-\eta}\right]\|x_k^\delta - x_*\|^2 \\ & + \frac{\rho}{8}\alpha_k DG\|x_k^\delta - x_*\| + \left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta) + G\right]\frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

จากค่า $0 < \alpha_k < \frac{1}{4}$, $0 < \eta < \frac{1}{2}$ และ $L < \frac{1}{2}$ จึงทำให้ได้ว่าค่า $C(L,\eta) < 2$ และสามารถประมาณค่าในแต่ละเทอมได้ดังต่อไปนี้

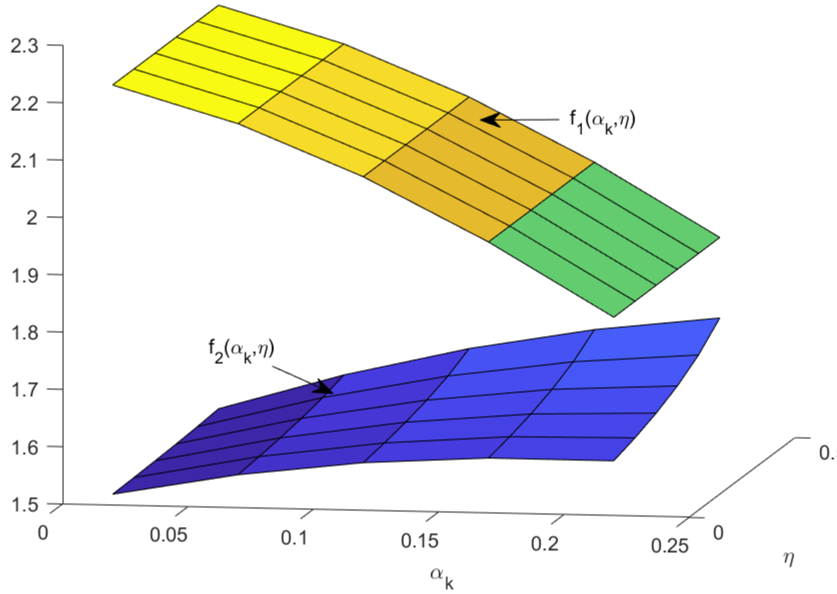
$$\frac{\rho}{8}\alpha_k DG\|x_k^\delta - x_*\| \leqslant \frac{\rho}{4}\alpha_k DG\|x_k^\delta - x_*\| \quad (2.17)$$

และ

$$\left[\frac{1}{2}(1-\alpha_k)^2C^2(L,\eta) + G\right]\frac{\rho^2}{128}\alpha_k^2 \leqslant \frac{5}{128}\rho^2\alpha_k^2 \leqslant \frac{1}{16}\rho^2\alpha_k^2 \quad (2.18)$$

และเทอมแรกประมาณโดยใช้โปรแกรม MATLAB (รูปที่ 2.1) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}&\left[D^2 + \frac{1}{2}L(1-\alpha_k)C(L,\eta)D + \frac{1}{4}(1+\eta)LC(L,\eta)\frac{\alpha_k}{1-\eta}\right]\|x_k^\delta - x_*\|^2 \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{4}D^2G^2\|x_k^\delta - x_*\|^2\end{aligned} \quad (2.19)$$



รูปที่ 2.1: ภาพแสดงการประมาณค่าโดยโปรแกรม Matlab เมื่อให้ $f_1(\alpha_k,\eta) := \left[D^2 + \frac{1}{2}L(1-\alpha_k)C(L,\eta)D + \frac{1}{4}(1+\eta)LC(L,\eta)\frac{\alpha_k}{1-\eta}\right]$ และ $f_2(\alpha_k,\eta) := \frac{1}{4}D^2G^2$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|x_{k+1}^{\delta} - x_*\|^2 &\leqslant \frac{1}{4}D^2G^2\|x_k^{\delta} - x_*\|^2 + \frac{\rho}{4}\alpha_k DG\|x_k^{\delta} - x_*\| + \frac{1}{16}\rho^2\alpha_k^2 \\ &\leqslant \left[\frac{1}{2}DG\|x_k^{\delta} - x_*\| + \frac{1}{4}\rho\alpha_k\right]^2 \end{aligned} \tag{2.20}$$

เนื่องจาก $G := (1-\alpha_k)C(1,\eta) + 1$ และ $0 < \eta < 0.5,\ 0.02 < \alpha_k < 0.25$ จึงทำให้ได้ว่า $1 < \frac{3}{4}(1-\alpha_k)C(L,\eta)$ ดังนั้น $G < \frac{7}{8}(1-\alpha_k)C(L,\eta)$
โดยการแก้สมการ จะได้

$$\begin{aligned}\|x_{k+1}^{\delta} - x_*\| &\leqslant \frac{1}{2}DG\|x_k^{\delta} - x_*\| + \frac{1}{4}\rho\alpha_k \\ &\leqslant \frac{1}{2}D\frac{7}{4}(1-\alpha_k)C(L,\eta)\|x_k^{\delta} - x_*\| + \frac{1}{4}\rho\alpha_k \\ &\leqslant \frac{7}{8}DC(L,\eta)(1-\alpha_k)\|x_k^{\delta} - x_*\| + \frac{1}{4}\rho\alpha_k \quad ; \quad \frac{7}{8}DC(L,\eta) < 1 \\ &\leqslant (1-\alpha_k)\|x_k^{\delta} - x_*\| + \frac{1}{4}\rho\alpha_k \end{aligned} \tag{2.21}$$

ยิ่งไปกว่านั้นโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า

$$\|x_{k+1}^{\delta} - x_*\| \leqslant \|x_0 - x_*\| \prod_{j=0}^{k}(1-\alpha_j) + \frac{\rho}{4}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j \prod_{i=j+1}^{k}(1-\alpha_i)$$

ซึ่งการพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะแสดงดังต่อไปนี้ ให้ $P(k)$ แทนข้อความ

$$\|x_{k+1}^{\delta} - x_*\| \leqslant \|x_0 - x_*\| \prod_{j=0}^{k}(1-\alpha_j) + \frac{\rho}{4}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j \prod_{i=j+1}^{k}(1-\alpha_i)$$

1. จะแสดงว่า $P(0)$ เป็นจริง จากสมการ (2.21) ให้ $k=0$ จะได้

$$\begin{aligned}\|x_1^{\delta} - x_*\| &\leqslant (1-\alpha_0)\|x_0^{\delta} - x_*\| + \frac{1}{4}\alpha_0\rho \\ &\leqslant \|x_0^{\delta} - x_*\| \prod_{j=0}^{0}(1-\alpha_j) + \frac{\rho}{4}\sum_{j=0}^{0}\alpha_j \prod_{i=j+1}^{0}(1-\alpha_i)\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $P(0)$ เป็นจริง

2. ให้ $P(k)$ เป็นจริง จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง จากสมการ (2.21) จะได้

$$\begin{aligned}\|x_{k+2}^{\delta} - x_*\| &\leqslant (1-\alpha_{k+1})\|x_{k+1}^{\delta} - x_*\| + \frac{\rho}{4}\alpha_{k+1} \\ &\leqslant (1-\alpha_{k+1})\|x_0 - x_*\| \prod_{j=0}^{k}(1-\alpha_j) \\ &\quad + (1-\alpha_{k+1})\frac{\rho}{4}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j \prod_{i=j+1}^{k}(1-\alpha_i) + \frac{\rho}{2}\alpha_{k+1} \\ &\leqslant \|x_0 - x_*\|(1-\alpha_{k+1}) \prod_{j=0}^{k}(1-\alpha_j) \\ &\quad + \frac{\rho}{4}\left[(1-\alpha_{k+1})\sum_{j=0}^{k}\alpha_j \prod_{i=j+1}^{k}(1-\alpha_i) + \alpha_{k+1}\right] \\ &\leqslant \|x_0 - x_*\| \prod_{j=0}^{k+1}(1-\alpha_j) + \frac{\rho}{4}\left[\sum_{j=0}^{k}\alpha_j \prod_{i=j+1}^{k+1}(1-\alpha_i) + \alpha_{k+1}\right] \\ &\leqslant \|x_0 - x_*\| \prod_{j=0}^{k+1}(1-\alpha_j) + \frac{\rho}{4}\sum_{j=0}^{k+1}\alpha_j \prod_{i=j+1}^{k+1}(1-\alpha_i)\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

มหาวิทยาลัยศิลปากร

โดย บทตั้ง 2.2 ทำให้ได้ว่า

$$\|x_{k+1}^{\delta}-x_*\| \leqslant \|x_0-x_*\|\prod_{j=0}^{k}(1-\alpha_j)+\frac{\rho}{4}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\prod_{i=j+1}^{k}(1-\alpha_i) \leqslant \frac{1}{2}\rho$$

เพราะฉะนั้น

$$\|x_{k+1}^{\delta}-x_0\| \leqslant \|x_{k+1}^{\delta}-x_*\|+\|x_*-x_0\| \leqslant \rho$$

จึงทำให้ได้ว่า $x_{k+1}^{\delta} \in B_{\rho}(x_0)$

ทฤษฎีบท 2.5. ถ้าการทำซ้ำ (1.20) ถูกหยุดด้วยหลักความแตกต่าง (2.9) เมื่อ τ สอดคล้องกับ (2.10) แล้ว

$$\tau\delta^{+}\sum_{k=0}^{k_*-1}\|F(z_k^{\delta})=y^{\delta}\| \leqslant \frac{\rho^2}{H}\left(\frac{1}{64}+\sum_{k=0}^{k_*-1}\alpha_k\right)$$

ถ้า $B-\frac{(1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)}{\tau} \geqslant H>0$ เป็นจริงสำหรับทุก $k \in N$ แล้ว ในกรณีของข้อมูลจริง ($\delta=0$) จะได้ว่า

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|F(z_k)-y\|^2<\infty$$

พิสูจน์ ถ้ากระบวนการทำซ้ำสิ้นสุดลงโดยหลักความแตกต่าง (1.10) แล้วสำหรับ $0 \leqslant k < k_*$ โดยสมการ (2.14) ในทฤษฎีบท 2.4 ที่ $\|x_{k+1}^{\delta}-x_*\| \leqslant \frac{1}{2}\rho$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}^{\delta}-x_*\|^2 \leqslant & \left[\left(\frac{E}{(1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)}+\delta\right)\frac{(1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)}{B}\right. \\
& \left.-\|F(z_k^{\delta})-y^{\delta}\|\right]B\|F(z_k^{\delta})-y^{\delta}\| \\
& +\frac{1}{4}D^2G^2\|x_k^{\delta}-x_*\|^2+\frac{\rho}{4}\alpha_k DG\|x_k^{\delta}-x_*\|+\frac{1}{16}\rho^2\alpha_k^2 \\
\leqslant & \left[\delta^{+}\frac{(1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)}{B}-\|F(z_k^{\delta})-y^{\delta}\|\right]B\|F(z_k^{\delta})-y^{\delta}\| \\
& +\frac{1}{4}D^2G^2\|x_k^{\delta}-x_*\|^2+\frac{\rho}{4}\alpha_k DG\|x_k^{\delta}-x_*\|+\frac{1}{16}\rho^2\alpha_k^2 \\
\leqslant & \left[\frac{(1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)}{B\tau}\|F(z_k^{\delta})-y^{\delta}\|-\|F(z_k^{\delta})-y^{\delta}\|\right]B\|F(z_k^{\delta})-y^{\delta}\| \\
& +\frac{1}{4}D^2G^2\|x_k^{\delta}-x_*\|^2+\frac{\rho}{4}\alpha_k DG\|x_k^{\delta}-x_*\|+\frac{1}{16}\rho^2\alpha_k^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1}^{\delta}-x_*\|^2 &\leqslant \left[\frac{(1-\frac{1}{2}\alpha_k)(\eta+1)}{\tau}-B\right]\|F(z_k^{\delta})-y^{\delta}\|^2 \\
&\quad +\frac{1}{4}D^2G^2\|x_k^{\delta}-x_*\|^2+\frac{\rho}{4}\alpha_k DG\|x_k^{\delta}-x_*\|+\frac{1}{16}\rho^2\alpha_k^2 \\
&\leqslant -H\|F(z_k^{\delta})-y^{\delta}\|^2+\frac{1}{4}D^2G^2\|x_k^{\delta}-x_*\|^2+\frac{\rho}{4}\alpha_k DG\|x_k^{\delta}-x_*\| \\
&\quad +\frac{1}{16}\rho^2\alpha_k^2
\end{aligned}
$$

นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1}^{\delta}-x_*\|^2+H\|F(z_k^{\delta})-y^{\delta}\|^2 &\leqslant \frac{1}{4}D^2G^2\|x_k^{\delta}-x_*\|^2+\frac{\rho}{4}\alpha_k DG\|x_k^{\delta}-x_*\| \\
&\quad +\frac{1}{16}\rho^2\alpha_k^2 \\
&\leqslant \frac{1}{4}D^2G^2\|x_k^{\delta}-x_*\|^2+\frac{\rho^2}{8}\alpha_k DG+\frac{1}{16}\rho^2\alpha_k^2 \\
&\leqslant \frac{1}{4}D^2G^2\|x_k^{\delta}-x_*\|^2+\rho^2\alpha_k\left(\frac{1}{8}DG+\frac{1}{16}\alpha_k\right)
\end{aligned}
$$

จาก $0.02<\alpha_k<0.25, 0<\eta<\frac{1}{2}$ ทำให้ได้ว่า $\frac{1}{8}DG+\frac{1}{16}\alpha_k\leqslant 1$ และจะได้

$$
\|x_{k+1}^{\delta}-x_*\|^2+H\|F(z_k^{\delta})-y^{\delta}\|^2\leqslant\|x_k^{\delta}-x_*\|^2+\rho^2\alpha_k
$$

จากสมการข้างต้น ทำให้ได้ว่า $H\|F(z_k^{\delta})-y\|^2\leqslant\|x_k^{\delta}-x_*\|^2-\|x_{k+1}^{\delta}-x_*\|^2+\rho^2\alpha_k$

$$
\begin{gathered}
k=0; H\|F(z_0^{\delta})-y\|^2\leqslant\|x_0^{\delta}-x_*\|^2-\|x_1^{\delta}-x_*\|^2+\rho^2\alpha_0 \\
k=1; H\|F(z_1^{\delta})-y\|^2\leqslant\|x_1^{\delta}-x_*\|^2-\|x_2^{\delta}-x_*\|^2+\rho^2\alpha_1 \\
k=2; H\|F(z_2^{\delta})-y\|^2\leqslant\|x_2^{\delta}-x_*\|^2-\|x_3^{\delta}-x_*\|^2+\rho^2\alpha_2 \\
\vdots \\
k=k_*-1; H\|F(z_{k_*-1}^{\delta})-y\|^2\leqslant\|x_{k_*-1}^{\delta}-x_*\|^2-\|x_{k_*}^{\delta}-x_*\|^2+\rho^2\alpha_{k_*-1}
\end{gathered}
$$

คำนวณผลบวกตั้งแต่ $k=0$ ถึง $k=k_*-1$ และใช้ทฤษฏีบทกลับอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม (reverse triangle inequality) จะได้

$$
\begin{aligned}
H\sum_{k=0}^{k_*-1}\|F(z_k^{\delta})-y\|^2 &\leqslant \|x_0^{\delta}-x_*\|^2-\|x_{k_*}^{\delta}-x_*\|^2+\rho^2\sum_{k=0}^{k_*-1}\alpha_k \\
&\leqslant \|x_0^{\delta}-x_{k_*}^{\delta}\|^2+\rho^2\sum_{k=0}^{k_*-1}\alpha_k \\
&\leqslant \frac{\rho^2}{64}+\rho^2\sum_{k=0}^{k_*-1}\alpha_k
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{k=0}^{k_*-1} \|F(z_k^\delta) - y\|^2 \leqslant \frac{\rho^2}{H}\left(\frac{1}{64} + \sum_{k=0}^{k_*-1} \alpha_k\right)$$

และโดย (2.7) จะได้ว่า

$$\tau\delta^+ \sum_{k=0}^{k_*-1} \|F(z_k^\delta) - y^\delta\| \leqslant \sum_{k=0}^{k_*-1} \|F(z_k^\delta) - y\|^2 \leqslant \frac{\rho^2}{H}\left(\frac{1}{64} + \sum_{k=0}^{k_*-1} \alpha_k\right)$$

และถ้า $\delta = 0$

$$H\|F(z_k) - y\|^2 \leqslant \|x_k - x_*\|^2 - \|x_{k+1} - x_*\|^2 + \rho^2\alpha_k$$

สำหรับทุก $k \in N$ ผลบวกตั้งแต่ $k = 0$ ถึง $k = \infty$ จะได้

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|F(z_k) - y\|^2 \leqslant \frac{\rho^2}{H}\left(\frac{1}{64} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\right)$$

ทฤษฎีบท 2.6. ให้ $\delta = 0$ ใน (1.5) ถ้า α_k สอดคล้องกับ (2.1),(2.2) F สอดคล้องกับ (1.12), (1.13) และ x_* เป็นผลเฉลยใน $B_{\rho/8}(x_0) \cap B_{\rho/8}(\varsigma)$ แล้ว x_k ลู่เข้าสู่ $x_* \in B_\rho(x_0)$ ยิ่งไปกว่านั้น ถ้าให้ $\varsigma = x_0$ และ $x^\dagger \in B_{\rho/8}(x_0)$ เป็นผลเฉลยเดียวที่อยู่ใกล้ x_0 ที่สุด นอกจากนี้ถ้าเงื่อนไข $N(F'(x^\dagger)) \subseteq N(F'(x))$ สำหรับทุก $x \in B_\rho(x_0)$ เป็นจริง แล้ว x_k ลู่เข้าสู่ $x^\dagger$

พิสูจน์ ให้ $\tilde{x_*}$ เป็นผลเฉลยของ (1.4) ใน $B_{\rho/8}(x_0) \cap B_{\rho/8}(\varsigma)$ และให้ $e_k := x_k - \tilde{x_*}$ โดยที่ $x_k \in B_{\rho/8}(x_0)$ แล้ว

$$\begin{aligned}
x_{k+1} - x_* &= \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}z_k - \frac{1}{2}F'(z_k)^*(F(z_k) - y) - \frac{1}{2}\alpha_k(z_k - \varsigma) - x_* \\
&= \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}z_k - \frac{1}{2}F'(z_k)^*(F(z_k) - y) - \frac{1}{2}\alpha_k z_k + \frac{1}{2}\alpha_k\varsigma - x_* \\
&= \frac{1}{2}(x_k - x_*) + \frac{1}{2}(\alpha_k\varsigma - x_*) + \frac{1}{2}z_k(1 - \alpha_k) - \frac{1}{2}F'(z_k)^*(F(z_k) - y)
\end{aligned}$$

จึงได้ว่า $\quad e_{k+1} = \frac{1}{2}e_k + \frac{1}{2}(\alpha_k\varsigma - x_*) + \frac{1}{2}z_k(1 - \alpha_k) - \frac{1}{2}F'(z_k)^*(F(z_k) - y)$

จากสมการข้างต้นให้ $k = m$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
k =& m \quad ; e_{m+1} = \frac{1}{2}e_m + \frac{1}{2}(\alpha_m \varsigma - x_*) + \frac{1}{2}z_m(1-\alpha_m) - \frac{1}{2}F'(z_m)^*(F(z_m)-y) \\
k =& m+1 \quad ; e_{m+2} = \frac{1}{2}e_{m+1} + \frac{1}{2}(\alpha_{m+1}\varsigma - x_*) + \frac{1}{2}z_{m+1}(1-\alpha_{m+1}) \\
&\qquad - \frac{1}{2}F'(z_{m+1})^*(F(z_{m+1})-y) \\
&\quad = \left(\frac{1}{2}\right)^2 e_m + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (\alpha_m\varsigma - x_*) + \frac{1}{2}(\alpha_{m+1}\varsigma - x_*) \\
&\qquad + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z_m(1-\alpha_m) + \frac{1}{2}z_{m+1}(1-\alpha_{m+1}) \\
&\qquad - \left(\frac{1}{2}\right)^2 F'(z_m)^*(F(z_m)-y) - \frac{1}{2}F'(z_{m+1})^*(F(z_{m+1})-y) \\
k =& m+2 \quad ; e_{m+3} = \frac{1}{2}e_{m+2} + \frac{1}{2}(\alpha_{m+2}\varsigma - x_*) + \frac{1}{2}z_{m+2}(1-\alpha_{m+2}) \\
&\qquad - \frac{1}{2}F'(z_{m+2})^*(F(z_{m+2})-y) \\
&\quad = \left(\frac{1}{2}\right)^3 e_m + \left(\frac{1}{2}\right)^3 (\alpha_m\varsigma - x_*) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (\alpha_{m+1}\varsigma - x_*) \\
&\qquad + \frac{1}{2}(\alpha_{m+2}\varsigma - x_*) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 z_m(1-\alpha_m) \\
&\qquad + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z_{m+1}(1-\alpha_{m+1}) + \frac{1}{2}z_{m+2}(1-\alpha_{m+2}) \\
&\qquad - \left(\frac{1}{2}\right)^3 F'(z_m)^*(F(z_m)-y) \\
&\qquad - \left(\frac{1}{2}\right)^2 F'(z_{m+1})^*(F(z_{m+1})-y) \\
&\qquad - \frac{1}{2}F'(z_{m+2})^*(F(z_{m+2})-y) \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

ให้ $m \leqslant n$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
e_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} e_m + \sum_{j=m}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j}(\alpha_j\varsigma - x_*) + \sum_{j=m}^{n-1} z_j(1-\alpha_j)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} \\
- \sum_{j=m}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} F'(z_j)^*(F(z_j)-y) \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

ต่อไปจะพิสูจน์ว่า

$$e_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} e_m + \sum_{j=m}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} (\alpha_j \varsigma - x_*) + \sum_{j=m}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} z_j(1-\alpha_j) - \sum_{j=m}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} F'(z_j)^*(F(z_j)-y)$$

โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$e_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} e_m + \sum_{j=m}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} (\alpha_j \varsigma - x_*) + \sum_{j=m}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} z_j(1-\alpha_j) - \sum_{j=m}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} F'(z_j)^*(F(z_j)-y)$$

1. จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

   จาก $\quad e_{k+1} = \frac{1}{2}e_k + \frac{1}{2}(\alpha_k \varsigma - x_*) + \frac{1}{2}z_k(1-\alpha_k) - \frac{1}{2}F'(z_k)^*(F(z_k)-y)$

   ให้ $k = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2}e_0 + \frac{1}{2}(\alpha_0 \varsigma - x_*) + \frac{1}{2}z_0(1-\alpha_0) - \frac{1}{2}F'(z_0)^*(F(z_0)-y) \\ &= \frac{1}{2}e_0 + \sum_{j=0}^{0} \frac{1}{2}(\alpha_j \varsigma - x_*) + \sum_{j=0}^{0} \frac{1}{2}z_j(1-\alpha_j) - \sum_{j=0}^{0} \frac{1}{2}F'(z_j)^*(F(z_j)-y) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{1-0} e_0 + \sum_{j=0}^{1-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-j} (\alpha_j \varsigma - x_*) + \sum_{j=0}^{1-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-j} z_j(1-\alpha_j) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{1-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-j} F'(z_j)^*(F(z_j)-y) \end{aligned}$$

   เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

2. ให้ $P(n)$ เป็นจริง จะแสดงว่า $P(n+1)$ เป็นจริง

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= \frac{1}{2}e_n + \frac{1}{2}(\alpha_n \varsigma - x_*) + \frac{1}{2}z_n(1-\alpha_n) - \frac{1}{2}F'(z_n)^*(F(z_n)-y) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} e_m + \sum_{j=m}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j}(\alpha_j\varsigma - x_*) + \sum_{j=m}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} z_j(1-\alpha_j) \\
&\quad - \sum_{j=m}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} F'(z_j)^*(F(z_j)-y)\Bigg] + \frac{1}{2}(\alpha_n\varsigma - x_*) + \frac{1}{2}z_n(1-\alpha_n) \\
&\quad - \frac{1}{2}F'(z_n)^*(F(z_n)-y) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-m} e_m + \sum_{j=m}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-j}(\alpha_j\varsigma - x_*) \\
&\quad + \sum_{j=m}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-j} z_j(1-\alpha_n) - \sum_{j=m}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-j} F'(z_j)^*(F(z_j)-y)
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $P(n+1)$ เป็นจริงสำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}_0$

ลำดับต่อมาพิสูจน์ว่า $\{\|e_k\|\}_{k\in\mathbb{N}}$ ลู่เข้า จาก $\{\|e_k\| : k \in \mathbb{N}\}$ มีขอบเขตและ $\{\|e_k\|\}_{k\in\mathbb{N}}$ มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า $\{\|e_{n(k)}\|\}_{k\in\mathbb{N}}$ สำหรับบาง $\varepsilon > 0$ (เมื่อสมมติให้ $n(\cdot)$ เป็นฟังก์ชันลดทางเดียวบน $\mathbb{N}$) ให้ $\{\|e_{s(l)}\|\}_{k\in\mathbb{N}}$ (เมื่อสมมติให้ $s(\cdot)$ เป็นฟังก์ชันลดทางเดียวบน $\mathbb{N}$) เป็นลำดับย่อยของ $\{\|e_k\|\}_{k\in\mathbb{N}}$ สำหรับ $l \in \mathbb{N}$ ค่า k คือค่าดัชนีที่มากที่สุดซึ่ง $s(l) \geqslant n(k)$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\hat{k}(l)$ โดยใช้สัญลักษณ์ที่กล่าวมาสามารถประมาณค่าได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
\|e_{s(l)}\| := \|x_{s(l)} - x_*\| &\leqslant (1-\alpha_{s(l)-1})\|x_{s(l)-1} - x_*\| + \frac{1}{4}\alpha_{s(l)-1}\rho \\
&\leqslant (1-\alpha_{s(l)-1})\|e_{s(l)-1}\| + \frac{1}{4}\alpha_{s(l)-1}\rho \\
s(l) = 1; \|e_1\| &\leqslant (1-\alpha_0)\|e_0\| + \frac{1}{4}\alpha_0\rho \\
s(l) = 2; \|e_2\| &\leqslant (1-\alpha_1)\|e_1\| + \frac{1}{4}\alpha_1\rho \\
&\leqslant (1-\alpha_1)(1-\alpha_0)\|e_0\| + (1-\alpha_1)\frac{1}{4}\alpha_0\rho + \frac{1}{4}\alpha_1\rho
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s(l) = 3; \|e_3\| &\leqslant (1-\alpha_2)\|e_2\| + \frac{1}{4}\alpha_2\rho \\
&\leqslant (1-\alpha_2)(1-\alpha_1)(1-\alpha_0)\|e_0\| + (1-\alpha_2)(1-\alpha_1)\frac{1}{4}\alpha_0\rho \\
&\quad + (1-\alpha_2)\frac{1}{2}\alpha_1\rho + \frac{1}{4}\alpha_2\rho \\
&\leqslant \prod_{j=0}^{2}(1-\alpha_j)\|e_0\| + \frac{1}{4}\rho\sum_{j=0}^{2}\alpha_j\prod_{r=j+1}^{2}(1-\alpha_r) \\
&\ \vdots \\
s(l) = s(l); \|e_{s(l)}\| &\leqslant (1-\alpha_{s(l)-1})\|e_{s(l)-1}\| + \frac{1}{4}\alpha_{s(l)-1}\rho \\
&\leqslant \|e_0\|\prod_{j=0}^{s(l)-1}(1-\alpha_j) + \frac{1}{4}\rho\sum_{j=0}^{s(l)-1}\alpha_j\prod_{r=j+1}^{s(l)-1}(1-\alpha_r)
\end{aligned}
$$

จาก $s(l) \geqslant n(k)$ ทำให้ได้ว่า

$$\|e_{s(l)}\| \leqslant \|e_{n(\hat{k}(l))}\| \prod_{j=n(\hat{k}(l))}^{s(l)-1}(1-\alpha_j) + \frac{1}{4}\rho\sum_{j=n(\hat{k}(l))}^{s(l)-1}\alpha_j\prod_{r=j+1}^{s(l)-1}(1-\alpha_r)$$

การพิสูจน์ว่า

$$\|e_{s(l)}\| \leqslant \|e_{n(\hat{k}(l))}\| \prod_{j=n(\hat{k}(l))}^{s(l)-1}(1-\alpha_j) + \frac{1}{4}\rho\sum_{j=n(\hat{k}(l))}^{s(l)-1}\alpha_j\prod_{r=j+1}^{s(l)-1}(1-\alpha_r)$$

เป็นจริง ใช้หลักการเดียวกับอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้แสดงไว้แล้วข้างต้น
จากสมการ (2.2) โดยอาศัย บทตั้ง 2.1 จะได้ว่า

$$\limsup_{l\to\infty} \|e_{s(l)}\| - \|e_{n(\hat{k}(l))}\| \leqslant 0$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\limsup_{l\to\infty} (\|e_{n(\hat{k}(l))}\| - \|e_{s(l)}\|) \leqslant 0$$

จาก $\|e_{n(\hat{k}(l))}\| \to \varepsilon$ สำหรับ $l \to \infty$ จะได้ว่า

$$\|e_{s(l)}\| \to \varepsilon, \quad l \to \infty$$

ทำให้ได้ว่า

$$\|e_k\| \to \varepsilon, \quad k \to \infty \tag{2.23}$$

มหาวิทยาลัยศิลปากร

โดยจะแสดงว่า e_k เป็นลำดับโคชี (Cauchy sequence) สำหรับ $j \geqslant k$ เลือก l โดยที่ $j \geqslant l \geqslant k$ จะได้ว่า

$$\|y - F(x_l)\| \leqslant \|y - F(x_i)\|, \quad k \leqslant i \leqslant j$$

โดยทฤษฎีอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม จะได้ว่า

$$\|e_j - e_k\| \leqslant \|e_j - e_l\| + \|e_l - e_k\|$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\|e_j - e_l\|^2 &= \|e_j\|^2 + \|e_l\|^2 - 2\langle e_j, e_l\rangle \\
&= \|e_j\|^2 + \|e_l\|^2 - 2\langle e_j + e_l - e_l, e_l\rangle \\
&= \|e_j\|^2 + \|e_l\|^2 - 2\langle e_j - e_l, e_l\rangle - 2\langle e_l, e_l\rangle \\
&= \|e_j\|^2 + \|e_l\|^2 - 2\langle e_j - e_l, e_l\rangle - 2\|e_l\|^2 \\
&= 2\langle e_l - e_j, e_l\rangle + \|e_j\|^2 - \|e_l\|^2 \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned}
\|e_l - e_k\|^2 &= \|e_l\|^2 + \|e_k\|^2 - 2\langle e_l, e_k\rangle \\
&= \|e_l\|^2 + \|e_k\|^2 - 2\langle e_l, e_k - e_l + e_l\rangle \\
&= \|e_l\|^2 + \|e_k\|^2 - 2\langle e_l, e_l\rangle - 2\langle e_l, e_k - e_l\rangle \\
&= 2\langle e_l - e_k, e_l\rangle + \|e_k\|^2 - \|e_l\|^2 \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

จาก (2.23) สำหรับ $k \to \infty$ สองเทอมสุดท้ายของสมการด้านขวามือใน (2.24) และ (2.25) ลู่เข้าสู่ $\varepsilon^2 - \varepsilon^2 = 0$

ลำดับต่อมาจะพิจารณาเทอมแรกของสมการด้านขวามือใน (2.24) และ (2.25) จาก (2.22)

ทำให้ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
e_j &= \left(\frac{1}{2}\right)^{j-l} e_l + \sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}(\alpha_r\varsigma - x_*) + \sum_{r=l}^{j-1} z_r(1-\alpha_r)\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} \\
&\quad - \sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} F'(z_r)^*(F(z_r)-y) \\
e_l - e_j &= e_l - \left(\frac{1}{2}\right)^{j-l} e_l - \sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}(\alpha_r\varsigma - x_*) - \sum_{r=l}^{j-1} z_r(1-\alpha_r)\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} \\
&\quad + \sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} F'(z_r)^*(F(z_r)-y) \\
&= e_l\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j-l}\right] - \sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}(\alpha_r\varsigma - x_*) - \sum_{r=l}^{j-1} z_r(1-\alpha_r)\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} \\
&\quad + \sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} F'(z_r)^*(F(z_r)-y)
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|\langle e_l - e_j, e_l\rangle| &= \left|\left\langle e_l\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j-l}\right] - \sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}(\alpha_r\varsigma - x_*)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \sum_{r=l}^{j-1} z_r(1-\alpha_r)\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} + \sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} F'(z_r)^*(F(z_r)-y), e_l\right\rangle\right| \\
&\leqslant \left|\left\langle e_l\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j-l}\right], e_l\right\rangle - \left\langle \sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}(\alpha_r\varsigma - x_*)\right.\right. \\
&\quad \left. + \sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} z_r(1-\alpha_r), e_l\right\rangle \\
&\quad \left. + \left\langle \sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} F'(z_r)^*(F(z_r)-y), e_l\right\rangle\right| \\
&\leqslant \left|\left\langle e_l\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j-l}\right], e_l\right\rangle\right. \\
&\quad - \left\langle \sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}(\alpha_r\varsigma - \alpha_r x_* + \alpha_r x_* - x_* + z_r(1-\alpha_r)), e_l\right\rangle \\
&\quad \left. + \left\langle \sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} F'(z_r)^*(F(z_r)-y), e_l\right\rangle\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \left| \left\langle e_l \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{j-l} \right], e_l \right\rangle - \sum_{r=l}^{j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} \left\langle \alpha_r(\varsigma - x_*) + (1-\alpha_r)(z_r - x_*), e_l \right\rangle \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \sum_{r=l}^{j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} F'(z_r)^*(F(z_r) - y), e_l \right\rangle \right| \\
&\leqslant \left| \left\langle e_l \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{j-l} \right], e_l \right\rangle - \sum_{r=l}^{j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} \left\langle \alpha_r(\varsigma - x_*), e_l \right\rangle \right. \\
&\quad - \sum_{r=l}^{j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} \left\langle (1-\alpha_r)(z_r - x_*), e_l \right\rangle \\
&\quad \left. + \left\langle \sum_{r=l}^{j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} F'(z_r)^*(F(z_r) - y), e_l \right\rangle \right| \\
&\leqslant \|e_l\|^2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{j-l} \right] + \left| \sum_{r=l}^{j-1} \alpha_r \left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} \left\langle \varsigma - x_*, e_l \right\rangle \right| \\
&\quad + \left| \sum_{r=l}^{j-1} (1-\alpha_r) \left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} \left\langle z_r - x_*, e_l \right\rangle \right| \\
&\quad + \left| \sum_{r=l}^{j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} \left\langle F'(z_r)^*(F(z_r) - y), e_l \right\rangle \right| \\
&\leqslant \|e_l\|^2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{j-l} \right] + \left| \frac{1}{2} \sum_{r=l}^{j-1} \left(\alpha_r \prod_{s=r+1}^{j-1} (1-\alpha_s) \right) \left\langle \varsigma - x_*, e_l \right\rangle \right| \\
&\quad + \left| \sum_{r=l}^{j-1} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-(j-r)} \frac{1}{2} \alpha_r \prod_{s=r+1}^{j-1} (1-\alpha_s) \right) \left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} \left\langle z_r - x_*, e_l \right\rangle \right| \\
&\quad + \left| \sum_{r=l}^{j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} \left\langle F'(z_r)^*(F(z_r) - y), e_l \right\rangle \right| \\
&\leqslant \|e_l\|^2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{j-l} \right] + \left| \frac{1}{2} \sum_{r=l}^{j-1} \left(\alpha_r \prod_{s=r+1}^{j-1} (1-\alpha_s) \right) \left\langle \varsigma - x_*, e_l \right\rangle \right| \\
&\quad + \left| \sum_{r=l}^{j-1} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} - \frac{1}{2} \alpha_r \prod_{s=r+1}^{j-1} (1-\alpha_s) \right) \left\langle z_r - x_*, e_l \right\rangle \right| \\
&\quad + \left| \sum_{r=l}^{j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-r} \left\langle F'(z_r)^*(F(z_r) - y), e_l \right\rangle \right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \|e_l\|^2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j-l}\right]+\left|\frac{1}{2}\sum_{r=l}^{j-1}\left(\alpha_r\prod_{s=r+1}^{j-1}(1-\alpha_s)\right)\left\langle\varsigma-x_*,e_l\right\rangle\right| \\
&\quad+\left|\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)\prod_{k=1}^{j-r-1}\left(\frac{1}{2}\right)\left\langle z_r-x_*,e_l\right\rangle-\frac{1}{2}\sum_{r=l}^{j-1}\alpha_r\prod_{s=r+1}^{j-1}(1-\alpha_s)\left\langle z_r-x_*,e_l\right\rangle\right| \\
&\quad+\left|\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}\left\langle F'(z_r)^*(F(z_r)-y),e_l\right\rangle\right| \\
&\leqslant \|e_l\|^2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j-l}\right]+\frac{1}{2}\left|\sum_{r=l}^{j-1}\left(\alpha_r\prod_{s=r+1}^{j-1}(1-\alpha_s)\right)\left\langle\varsigma-x_*,e_l\right\rangle\right| \\
&\quad+\left|\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)\prod_{k=1}^{j-r-1}\left(\frac{1}{2}\right)\left\langle z_r-x_*,e_l\right\rangle\right|+\frac{1}{2}\left|\sum_{r=l}^{j-1}\alpha_r\prod_{s=r+1}^{j-1}(1-\alpha_s)\left\langle z_r-x_*,e_l\right\rangle\right| \\
&\quad+\left|\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}\left\langle F'(z_r)^*(F(z_r)-y),e_l\right\rangle\right| \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

ต่อมาจะประมาณค่าสมการด้านขวามือของ (2.26) โดย (2.8) ดังนั้นค่าประมาณเทอมที่สองของสมการ (2.26) คือ

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}\left\langle F'(z_r)^*(F(z_r)-y),e_l\right\rangle\right| \\
&=\left|\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}\left\langle F(z_r)-y,F'(z_r)(x_l-x_*)\right\rangle\right| \\
&=\left|\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}\left\langle F(z_r)-y,F'(z_r)(x_l-z_r+z_r-x_*)\right\rangle\right| \\
&\leqslant\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}\left|\left\langle F(z_r)-y,F'(z_r)(x_l-z_r)\right\rangle+\left\langle F(z_r)-y,F'(z_r)(z_r-x_*)\right\rangle\right| \\
&\leqslant\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}\left(\left|\left\langle F(z_r)-y,F'(z_r)(x_l-z_r)\right\rangle\right|+\left|\left\langle F(z_r)-y,F'(z_r)(z_r-x_*)\right\rangle\right|\right) \\
&\leqslant\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}\|F(z_r)-y\|\left(\|F'(z_r)(x_l-z_r)\|+\|F'(z_r)(z_r-x_*)\|\right) \\
&\leqslant\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}\|F(z_r)-y\|\left(\|F'(z_r)(z_r-x_l)\|+\|F'(z_r)(z_r-x_*)\|\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}\|F(z_r)-y\|\left((1+\eta)\|F(z_r)-F(x_l)\|+(1+\eta)\|F(z_r)-F(x_*)\|\right)\\
&\leqslant \sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}(1+\eta)\|F(z_r)-y\|\left(\|F(z_r)-F(x_l)\|+\|F(z_r)-F(x_*)\|\right)\\
&\leqslant \sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}(1+\eta)\|F(z_r)-y\|\left(\|F(z_r)-y\|+\|y-F(x_l)\|+\|F(z_r)-y\|\right)\\
&\leqslant \sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}(1+\eta)\|F(z_r)-y\|\left(\|F(x_l)-y\|+2\|F(z_r)-y\|\right)\\
&\leqslant (1+\eta)\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}\|F(z_r)-y\|\left(\|F(x_r)-y\|+2\|F(z_r)-y\|\right)\\
&\leqslant (1+\eta)\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}\|F(z_r)-y\|\Big(C(L,\eta)\|F(z_r)-y\|\\
&\qquad +C(L,\eta)\frac{L\alpha_r}{1-\eta}\|x_r-\varsigma\|+2\|F(z_r)-y\|\Big)\\
&\leqslant (1+\eta)\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}\|F(z_r)-y\|\left(2\|F(z_r)-y\|+4\|x_r-\varsigma\|+2\|F(z_r)-y\|\right)\\
&\leqslant 4(1+\eta)\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}\|F(z_r)-y\|\left(\|F(z_r)-y\|+\|x_r-\varsigma\|\right)\\
&\leqslant 4(1+\eta)\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}\|F(z_r)-y\|^2+4(1+\eta)\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-r}\|F(z_r)-y\|\|x_r-\varsigma\|\\
&\leqslant 4(1+\eta)\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)\prod_{k=1}^{j-r}\left(\frac{1}{2}\right)\|F(z_r)-y\|^2\\
&\qquad +4(1+\eta)\sum_{r=l}^{j-1}\left(\frac{1}{2}\right)\prod_{k=1}^{j-r}\left(\frac{1}{2}\right)\|F(z_r)-y\|\|x_r-\varsigma\| \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

โดยทฤษฎีบท 2.5 ทำให้ได้ว่า $\sum_{r=l}^{j-1}(\alpha_r\prod_{s=r+1}^{j-1}(1-\alpha_s))$ เข้าสู่ศูนย์ เมื่อ $l\to\infty$ โดยที่ $k\leqslant l\leqslant r\leqslant j-1$ นอกจากนี้ $\sum_{r=l}^{j-1}(\frac{1}{2})\prod_{k=1}^{j-r}(\frac{1}{2})$ เข้าสู่ศูนย์ เมื่อ $l\to\infty$ ดังนั้นเทอมที่สอง สาม และสี่ ของสมการด้านขวามือของ (2.26) ลู่เข้าสู่ศูนย์ เมื่อ $l\to\infty$ จาก $\|e_l\|$ มีขอบเขต เทอมแรกของ (2.26) ลู่เข้าสู่ศูนย์ ยิ่งไปกว่านั้น ทฤษฎีบท 2.4 ยังทำให้เทอมสุดท้ายของสมการ (2.26)

เข้าสู่ศูนย์ ดังนั้นจะได้ว่า

$$0 \leqslant \lim_{k\to\infty} \|e_j - e_l\|^2 = \lim_{k\to\infty} (2(e_l - e_j, e_l) + \|e_j\|^2 - \|e_l\|^2) = 0$$
$$0 \leqslant \lim_{k\to\infty} \|e_l - e_k\|^2 = \lim_{k\to\infty} (2(e_l - e_k, e_l) + \|e_k\|^2 - \|e_l\|^2) = 0$$

โดยการประมาณค่านี้แสดงว่า e_k และ x_k เป็นลำดับโคชี ให้ x_* เป็นลิมิตของ x_k และสังเกตว่า x_* เป็นผลเฉลยของ (1.4) ถ้า $\sum_{k=0}^{\infty} \|F(x_k) - y\| < \infty$

จาก (1.4) ให้ $x^\dagger$ เป็นผลเฉลยเดียวที่อยู่ใกล้ x_0 ที่สุด (ใน $B_{\rho/8}(x_0)$) และ $\varsigma = x_0$ ซึ่งสอดคล้องกับ $x^\dagger - x_0 \in N(F'(x^\dagger))^\perp$ จาก $N(F'(x^\dagger)) \subseteq N(F'(x))$ สำหรับทุก $k = 0, 1, 2, ...$

$$x_k - x_0 \in N(F'(x^\dagger))^\perp, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$x^\dagger - x_* = x^\dagger - x_0 + x_0 - x_* \in N(F'(x^\dagger))^\perp$$

สมมติให้ $x^\dagger \neq x_*$ แล้วจาก (1.13) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|F'(x^\dagger)(x_* - x^\dagger)\| &\leqslant \|F(x_*) - F(x^\dagger) - F'(x^\dagger)(x_* - x^\dagger)\| + \|F(x_*) - F(x^\dagger)\| \\ &\leqslant (1+\eta)\|F(x^\dagger) - F(x_*)\| \\ &\leqslant 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $x_* - x^\dagger \in N(F'(x^\dagger)) \cap N(F'(x^\dagger))^\perp = \{0\}$

ทฤษฎีบท 2.7. ภายใต้สมมติฐานของทฤษฎีบท 2.6 เมื่อสัญญาณรบกวน δ สอดคล้อง (1.5) ถ้าวิธีของฮวนสำหรับวิธีเรกกูลาไรเซชันเชิงกำกับแบบปรับปรุงของปัญหาอิลล์โพสแบบไม่เชิงเส้น (1.11) หยุดที่ $k_*(\delta, y^\delta)$ เป็นไปตามกฎการหยุดด้วยหลักความแตกต่าง (2.9) และ (2.10) แล้ว

$$x^\delta_{k_*(\delta,y^\delta)} \to x^*, \quad \delta \to 0$$

พิสูจน์ ให้ $\delta_n, n = 1, 2, \ldots$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าสู่ศูนย์เมื่อ $n \to \infty$ และให้ $y_n := y^{\delta_n}$ สอดคล้องกับลำดับของข้อมูลที่มีสัญญาณรบกวน สำหรับแต่ละคู่อันดับ (δ_n, y_n) แสดงได้โดย $k_n = k_*(\delta_n, y_n)$ ซึ่งสอดคล้องกับกฎการหยุดของวิธีหลักความแตกต่าง ในสมการ (2.9) และ (2.10)

เราจะแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี โดยที่กรณีแรก เราจะสมมติว่าจุด k เป็นลิมิตของ k_n โดยไม่ให้เสียนัยทั่วไปเราสมมติว่า $k_n = k$ สำหรับทุก $n \in N$ จากวิธีหลักความแตกต่าง จะได้ว่า

$$\|y_n - F(x_k^{\delta_n})\| \leqslant \tau\delta_n \tag{2.28}$$

เมื่อเราทำการตรึงค่า k โดยกำหนด $k_n = k$ ทำให้ x_k^δ ขึ้นอยู่กับ y^δ ทำให้ได้ว่า

$$x_k^{\delta_n} \to x_k, \quad F(x_k^{\delta_n}) \to F(x_k), \quad n \to \infty \tag{2.29}$$

จากนั้นเราจะทำการหาค่าลิมิตของสมการ (2.28) ซึ่งได้ผลลัพธ์คือ $F(x_k) = y$ ดังนั้น $x_k = x^*$ โดยทฤษฎีบท 2.6 และสมการ (2.29) เราจะได้ว่า

$$x_k^{\delta_n} \to x^*, \quad n \to \infty$$

ในกรณีถัดไปเราสมมติว่า k_n เป็นลำดับเพิ่ม สำหรับ $n > m$ จากสมการ (2.21) เมื่อ $n \to \infty$ จะได้ว่า

$$F(x_k) = \lim_{n\to\infty} F(x_k^{\delta_n}) = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y^{\delta_n} = y \tag{2.30}$$

เราจะสรุปได้จาก ทฤษฎีบท 2.4 ดังนี้

$$\begin{aligned}\|x_{k_n}^{\delta_n} - x^*\| &\leqslant \|x_{k_m}^{\delta_n} - x^*\| + \frac{\rho}{4}\sum_{j=k_m}^{k_{n-1}} \alpha_j \\ &\leqslant \|x_{k_m}^{\delta_n} - x_{k_m}\| + \|x_{k_m} - x^*\| + \frac{\rho}{4}\sum_{j=k_m}^{\infty} \alpha_j\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\|x_{k_n}^{\delta_n} - x^*\| \leqslant \|x_{k_m}^{\delta_n} - x_{k_m}\| + \|x_{k_m} - x^*\| + \frac{\rho}{4}\sum_{j=k_m}^{\infty} \alpha_j$ (2.31)

จากทฤษฎีบท 2.6 เรากล่าวได้ว่าให้ m มีขนาดใหญ่แล้ว x_{k_m} มีค่าใกล้เคียงกับ x^* เนื่องจาก δ_n เป็นลำดับที่ลู่เข้าสู่ศูนย์เมื่อ $n \to \infty$ ทำให้ได้ว่า $x_{k_m}^{\delta_n} \to x_{k_m}$ เพราะฉะนั้นจากสมการ (2.31) จะได้ $\|x_{k_n}^{\delta_n} - x^*\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$

บทที่ 3
ตัวอย่างเชิงตัวเลข

ในบทนี้จะเป็นแสดงผลลัพธ์ของปัญหา (1.4) เมื่อกำหนดตัวดำเนินการไม่เชิงเส้นดังนี้

$$[F(w)](s) = exp \int_0^1 k(s,t)w(t)dt \tag{3.1}$$

โดยที่ $F : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ เป็นตัวดำเนินการแบบไม่เชิงเส้น มีข้อมูลที่มีค่าคลาดเคลื่อน $y^\delta = exp((s^4 - 2s^3 + s)/12) + \delta cos(100s), s \in [0,1]$ และฟังก์ชันเคอร์เนล ที่กำหนดโดย

$$k(s,t) = \begin{cases} s(1-t), & s < t \\ t(1-s), & t \leq s \end{cases}$$

ซึ่ง $sup_{0 \leq k,s \leq 1} \mid k(s,t) \mid \leq 1$ และ F เป็นตัวดำเนินการซึ่งสามารถหาอนุพันธ์เฟอร์เชท $F'(\cdot)$ บนปริภูมิฮิลเบิร์ต กำหนดโดย

$$F'(x)g = F(x) \int_0^1 k(s,t)g(t)dt \tag{3.2}$$

นอกจากนี้ถ้า $\bar{x} = 0$ จะได้ว่า $\|F'(x)\| \leqslant exp(1/\sqrt{30})$ สำหรับวิธีของฮวนที่ $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$, $c_2 = a_{21} = 1$ และ $c_1 = a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ ทำให้ได้สมการคือ

$$x_{k+1}^\delta = \frac{1}{2}x_k^\delta + \frac{1}{2}z_k^\delta - \frac{1}{2}F'(z_k^\delta)^*(F(z_k^\delta) - y^\delta) - \frac{1}{2}\alpha_k(z_k^\delta - \varsigma) \tag{3.3}$$

$$z_k^\delta = x_k^\delta - F'(x_k^\delta)^*(F(x_k^\delta) - y^\delta) - \alpha_k(x_k^\delta - \varsigma), \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{3.4}$$

เมื่อ $x_0^\delta = x_0$ เรากล่าวว่า (3.4) เป็นผลเฉลยคาดเดาและ (3.3) เป็นการปรับแก้ค่าประมาณผลเฉลยให้ใกล้เคียงมากขึ้นและ h แทนขนาดของช่วงย่อย ซึ่งเกิดจากการแบ่ง $[0,1]$ ออกเป็นช่วงย่อยที่มีขนาดเท่าๆกัน

เนื่องจาก $X = L^2[0,1]$ และ $Y = L^2[0,1]$ แบ่งช่วง $[0,1]$ ออกเป็น m ช่วงย่อย คือ $0 = \hat{t}_1, \hat{t}_2, ..., \hat{t}_{m+1} = 1$ และ $0 = \hat{s}_1, \hat{s}_2, ..., \hat{s}_{m+1} = 1$ โดยเลือกฐานหลักที่เป็นเซตที่ตั้งฉากกัน (orthogonal bases) $\{\varphi_1^{(m)}...\varphi_m^{(m)}\}$ และ $\{\psi_1^{(m)}...\psi_m^{(m)}\}$

กำหนดโดยฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ (piecewise continuous function) ซึ่ง $\varphi_j^{(m)}(\hat{t}) = 1$ สำหรับ $\hat{t} \in [\hat{t}_j, \hat{t}_{j+1}]$, $\psi_j^{(m)}(\hat{s}) = 1$ สำหรับ $\hat{s} \in [\hat{s}_j, \hat{s}_{j+1}]$ และ $\varphi_j^{(m)}(\hat{t}) = 0$, $\psi_j^{(m)}(\hat{s}) = 0$ ที่จุดอื่น เนื่องมาจาก $X_m = span\{\varphi_j^{(m)}\}_{j=1,...,m+1}$ และ $Y_m = span\{\psi_j^{(m)}\}_{j=1,...,m+1}$ เราให้ $x_k^\delta(\hat{t}) = \sum\limits_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t})$, $z_k^\delta(\hat{t}) = \sum\limits_{j=1}^{m+1} l_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t})$, $x_{k+1}^\delta(\hat{t}) = \sum\limits_{j=1}^{m+1} v_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t})$, $\varsigma = \delta x_*(\hat{t})$ กำหนดให้ $L^{(m)} = (l_1^{(m)}...l_m^{(m)})^T$, $U^{(m)} = (u_1^{(m)}...u_m^{(m)})^T$, $A^{(m)} = (a_1^{(m)}...a_m^{(m)})^T$, $G^{(m)} = (g_1^{(m)}...g_m^{(m)})^T$, $V^{(m)} = (v_1^{(m)}...v_m^{(m)})^T$, $M^{(m)} = (\mu_1^{(m)}...\mu_m^{(m)})^T$ จากสมการ (3.4) ทำให้ได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{m+1} l_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}) = \sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}) - F'(x_k^\delta(\hat{t}))^*(F'(x_k^\delta(\hat{t})) - y^\delta) - \alpha_k \sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}) + \alpha_k\varsigma \tag{3.5}$$

สำหรับ $j = 1$ พิจารณาผลคูณภายในของ (3.5) กับ $\varphi_1^{(m)}(\hat{t})$ เนื่องจาก $\varphi_j^{(m)}(\hat{t})$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉาก ที่กำหนดโดยฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ โดย $\varphi_j^{(m)}(\hat{t}) = 1$ สำหรับ $\hat{t} \in [\hat{t}_j, \hat{t}_{j+1}]$ และ $\varphi_j^{(m)}(\hat{t}) = 0$ ที่จุดอื่น ดังนั้นสำหรับ $j = 1$ จะได้

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{j=1}^{m+1} l_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \\ &\quad - \left\langle F'(x_k^\delta(\hat{t}))^*(F(x_k^\delta(\hat{t})) - y^\delta), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \alpha_k \sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \alpha_k\varsigma, \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \end{aligned} \tag{3.6}$$

พิจารณา

$$\left\langle \sum_{j=1}^{m+1} l_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle = \sum_{j=1}^{m+1} l_j^{(m)}\left\langle \varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle$$
$$= l_1^{(m)}\left\langle \varphi_1^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle + l_2^{(m)}\left\langle \varphi_2^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle + ...$$
$$+ l_m^{(m)}\left\langle \varphi_m^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle + l_{m+1}^{(m)}\left\langle \varphi_{m+1}^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle$$
$$= l_1^{(m)}\left\langle \varphi_1^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \tag{3.7}$$

ลำดับต่อมาพิจารณา

$$\left\langle \varphi_1^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle_{L^2[0,1]} = \int_0^1 |\varphi_1^{(m)}(\hat{t})|^2 d\hat{t}$$
$$= \int_{\hat{t}_1}^{\hat{t}_2} (\varphi_1^{(m)}(\hat{t}))^2 d\hat{t} + \int_{\hat{t}_2}^{\hat{t}_3} (\varphi_1^{(m)}(\hat{t}))^2 d\hat{t} + ...$$
$$+ \int_{\hat{t}_m}^{\hat{t}_{m+1}} (\varphi_1^{(m)}(\hat{t}))^2 d\hat{t}$$
$$= (\hat{t}_2 - \hat{t}_1) + 0 + ... + 0$$
$$= h$$

ดังนั้นจาก (3.7) จะได้ว่า

$$\left\langle \sum_{j=1}^{m+1} l_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle = l_1^{(m)}h \tag{3.8}$$

จากสมการ (3.6) พิจารณาเทอมแรกของสมการด้านขวามือจะได้ว่า

$$\left\langle \sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle = \sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)}\left\langle \varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle$$
$$= u_1^{(m)}\left\langle \varphi_1^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle + u_2^{(m)}\left\langle \varphi_2^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle$$
$$+ ... + u_m^{(m)}\left\langle \varphi_m^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle$$
$$+ u_{m+1}^{(m)}\left\langle \varphi_{m+1}^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle$$
$$= u_1^{(m)}\left\langle \varphi_1^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle$$
$$= u_1^{(m)}h \tag{3.9}$$

ในเทอมสองของสมการด้านขวามือของ (3.6) และ จาก (3.1), (3.2) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&-\left\langle F'(x_k^\delta(\hat{t}))^*(F(x_k^\delta(\hat{t}))-y^\delta), \varphi_1^{(m)}(\hat{t})\right\rangle \\
&= -\left\langle F'(x_k^\delta(\hat{t}))-y^\delta, F'(x_k^\delta(\hat{t}))\varphi_1^{(m)}(\hat{t})\right\rangle \\
&= -\left\langle F(x_k^\delta(\hat{t}))-y^\delta, F(x_k^\delta(\hat{t}))\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})\varphi_1^{(m)}(\hat{t})d\hat{t}\right\rangle \\
&= \left\langle y^\delta - F(x_k^\delta(\hat{t})), F(x_k^\delta(\hat{t}))\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})\varphi_1^{(m)}(\hat{t})d\hat{t}\right\rangle \\
&= \left\langle y^\delta - \frac{1}{12}exp\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})x_k^\delta(\hat{t})d\hat{t}, \frac{1}{12}exp\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})x_k^\delta(\hat{t})d\hat{t}\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})\varphi_1^{(m)}(\hat{t})d\hat{t}\right\rangle
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

จากคุณสมบัติของผลคูณภายในทำให้ (3.10) สามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&\left\langle y^\delta - \frac{1}{12}exp\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})x_k^\delta(\hat{t})d\hat{t}, \frac{1}{12}exp\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})x_k^\delta(\hat{t})d\hat{t}\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})\varphi_1^{(m)}(\hat{t})d\hat{t}\right\rangle \\
&= \int_0^1 \left[y^\delta - \frac{1}{12}exp\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})x_k^\delta(\hat{t})d\hat{t}\right]\left[\frac{1}{12}exp\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})x_k^\delta(\hat{t})d\hat{t}\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})\varphi_1^{(m)}(\hat{t})d\hat{t}\right]d\hat{s}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})x_k^\delta(\hat{t})d\hat{t} &= \int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})\sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t})d\hat{t} \\
&= \sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)}\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})\varphi_j^{(m)}(\hat{t})d\hat{t} \\
&= \sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)}\left[\int_{\hat{t}_1}^{\hat{t}_2} k(\hat{s},\hat{t})\varphi_j^{(m)}(\hat{t})d\hat{t} + \int_{\hat{t}_2}^{\hat{t}_3} k(\hat{s},\hat{t})\varphi_j^{(m)}(\hat{t})d\hat{t} + ...\right. \\
&\quad \left. + \int_{\hat{t}_j}^{\hat{t}_{j+1}} k(\hat{s},\hat{t})\varphi_j^{(m)}(\hat{t})d\hat{t} + ... + \int_{\hat{t}_m}^{\hat{t}_{m+1}} k(\hat{s},\hat{t})\varphi_j^{(m)}(\hat{t})d\hat{t}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)}\int_{\hat{t}_j}^{\hat{t}_{j+1}} k(\hat{s},\hat{t})\varphi_j^{(m)}(\hat{t})d\hat{t}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})\varphi_1^{(m)}(\hat{t})d\hat{t} &= \int_{\hat{t}_1}^{\hat{t}_2} k(\hat{s},\hat{t})\varphi_1^{(m)}(\hat{t})d\hat{t} + \int_{\hat{t}_2}^{\hat{t}_3} k(\hat{s},\hat{t})\varphi_1^{(m)}(\hat{t})d\hat{t} + ...\\ &\quad + \int_{\hat{t}_j}^{\hat{t}_{j+1}} k(\hat{s},\hat{t})\varphi_1^{(m)}(\hat{t})d\hat{t}\\ &= \int_{\hat{t}_1}^{\hat{t}_2} k(\hat{s},\hat{t})\varphi_1^{(m)}(\hat{t})d\hat{t}\\ &= \frac{1}{2}h\Big[k(\hat{s},\hat{t}_1) + k(\hat{s},\hat{t}_2)\Big] \end{aligned} \tag{3.13}$$

จาก (3.11), (3.12) และ (3.13) ทำให้สมการ (3.10) อยู่ในรูป

$$\begin{aligned}&-\Big\langle F'(x_k^\delta(\hat{t}))^*(F(x_k^\delta(\hat{t})) - y^\delta), \varphi_1^{(m)}(\hat{t})\Big\rangle\\ &\quad = \int_0^1 \Bigg[y^\delta - \frac{1}{12}exp\Bigg(\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)}\Big[k(\hat{s},\hat{t}_j) + k(\hat{s},\hat{t}_{j+1})\Big]\Bigg)\Bigg]\\ &\quad\times\Bigg[\frac{1}{12}exp\Bigg(\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)}\Big[k(\hat{s},\hat{t}_j) + k(\hat{s},\hat{t}_{j+1})\Big]\Bigg)\\ &\quad\times\Bigg(\frac{1}{2}h\Big[k(\hat{s},\hat{t}_1) + k(\hat{s},\hat{t}_2)\Big]\Bigg)\Bigg]d\hat{s} \end{aligned} \tag{3.14}$$

ให้ $\omega := \frac{1}{12}exp\Big(\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)}\Big[k(\hat{s},\hat{t}_j) + k(\hat{s},\hat{t}_{j+1})\Big]\Big)$ และประมาณค่าอินทิกรัลด้วยกฎสี่-เหลี่ยมคางหมูทำให้สมการ (3.14) อยู่ในรูป

$$\begin{aligned}&-\Big\langle F'(x_k^\delta(t))^*(F(x_k^\delta(t)) - y^\delta), \varphi_1^{(m)}(\hat{t})\Big\rangle\\ &\quad = \int_0^1 \Big[y^\delta - \omega(\hat{s})\Big]\Bigg[\omega(\hat{s})\Bigg(\frac{1}{2}h\Big[k(\hat{s},\hat{t}_1) + k(\hat{s},\hat{t}_2)\Big]\Bigg)\Bigg]d\hat{s}\\ &\quad = \frac{1}{4}h^2\sum_{j=1}^{m+1}\Bigg[(y^\delta(\hat{s}_j) - \omega(\hat{s}_j))(\omega(\hat{s}_j)(k(\hat{s}_j,\hat{t}_1) + k(\hat{s}_j,\hat{t}_2)))\\ &\qquad + (y^\delta(\hat{s}_{j+1}) - \omega(\hat{s}_{j+1}))(\omega(\hat{s}_{j+1})(k(\hat{s}_{j+1},\hat{t}_1) + k(\hat{s}_{j+1},\hat{t}_2)))\Bigg]\\ &\quad = \frac{1}{4}h^2 a(\hat{t}_1,\hat{t}_2) \end{aligned} \tag{3.15}$$

เมื่อ $$\begin{aligned} a(\hat{t}_1,\hat{t}_2) := \sum_{j=1}^{m+1}\Bigg[&(y^\delta(\hat{s}_j) - \omega(\hat{s}_j))(\omega(\hat{s}_j)(k(\hat{s}_j,\hat{t}_1) + k(\hat{s}_j,\hat{t}_2)))\\ &+ (y^\delta(\hat{s}_{j+1}) - \omega(\hat{s}_{j+1}))(\omega(\hat{s}_{j+1})(k(\hat{s}_{j+1},\hat{t}_1) + k(\hat{s}_{j+1},\hat{t}_2)))\Bigg]\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่ 3 ของสมการด้านขวามือของ (3.6)

$$
\begin{aligned}
-\left\langle \alpha_k \sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)} \varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle &= -\alpha_k \sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)} \left\langle \varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \\
&= -\alpha_k \left[u_1^{(m)} \left\langle \varphi_1^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle + \ldots \right. \\
&\quad \left. + u_{m+1}^{(m)} \left\langle \varphi_{m+1}^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \right] \\
&= -\alpha_k u_1^{(m)} \left\langle \varphi_1^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \\
&= -\alpha_k u_1^{(m)} h \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

และเทอมสุดท้ายของสมการด้านขวามือของ (3.6) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\left\langle \alpha_k \varsigma, \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle &= \alpha_k \left\langle \delta x_*(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \quad \text{โดยที่} \;\; x_*(\hat{t}) = \hat{t}(1-\hat{t}) \\
&= \alpha_k \left\langle \delta \hat{t}(1-\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \\
&= \alpha_k \delta \int_0^1 \hat{t}(1-\hat{t}) \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) d\hat{t} \\
&= \alpha_k \delta \int_{t_1}^{t_2} \hat{t}(1-\hat{t}) d\hat{t} \\
&= \alpha_k \delta \left(\left[\frac{\hat{t}_2^2}{2} - \frac{\hat{t}_2^3}{3} \right] - \left[\frac{\hat{t}_1^2}{2} - \frac{\hat{t}_1^3}{3} \right] \right) \\
&= \alpha_k g_1^{(m)} \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

เมื่อ $g_1^{(m)} := \delta \left(\left[\frac{\hat{t}_2^2}{2} - \frac{\hat{t}_2^3}{3} \right] - \left[\frac{\hat{t}_1^2}{2} - \frac{\hat{t}_1^3}{3} \right] \right)$

จาก (3.7), (3.9), (3.15), (3.16) และ (3.17) ทำให้สามารถเขียนสมการ (3.6) ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
l_1^{(m)} h &= u_1^{(m)} h + \frac{1}{4} h^2 a(\hat{t}_1, \hat{t}_2) - \alpha_k u_1^{(m)} h + \alpha_k g_1^{(m)} \\
l_1^{(m)} &= u_1^{(m)} + \frac{1}{4} h a(\hat{t}_1, \hat{t}_2) - \alpha_k u_1^{(m)} + \frac{1}{h} \alpha_k g_1^{(m)}
\end{aligned}
$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$
l_j^{(m)} = (1-\alpha_k) u_j^{(m)} + \frac{1}{4} h a(\hat{t}_j, \hat{t}_{j+1}) + \frac{1}{h} \alpha_k g_j^{(m)} \qquad (3.18)
$$

และสำหรับ $j = 1, \ldots, m$ จะได้ว่า

$$
L^{(m)} = (1-\alpha_k) U^{(m)} + \frac{1}{4} h A^{(m)} + \frac{1}{h} \alpha_k G^{(m)} \qquad (3.19)
$$

ต่อมาพิจารณาสมการ (3.3) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m+1} v_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}) =& \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m+1} l_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}) \\ &- \frac{1}{2}F'(z_k^\delta(\hat{t}))^*(F'(z_k^\delta(\hat{t})) - y^\delta) - \frac{1}{2}\alpha_k\sum_{j=1}^{m+1} l_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}) + \frac{1}{2}\alpha_k\varsigma\end{aligned} \tag{3.20}$$

สำหรับ $j = 1$ พิจารณาผลคูณภายในของ (3.20) กับ $\varphi_1^{(m)}(\hat{t})$ เนื่องจาก $\varphi_j^{(m)}(\hat{t})$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากที่กำหนดโดยฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ โดย $\varphi_j^{(m)}(\hat{t}) = 1$ สำหรับ $\hat{t} \in [\hat{t}_j, \hat{t}_{j+1}]$ และ $\varphi_j^{(m)}(\hat{t}) = 0$ ที่จุดอื่น ดังนั้นสำหรับ $j = 1$ จะได้

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{j=1}^{m+1} v_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t})\right\rangle =& \left\langle \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t})\right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m+1} l_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t})\right\rangle \\ &- \left\langle \frac{1}{2}F'(z_k^\delta(\hat{t}))^*(F(z_k^\delta(\hat{t})) - y^\delta), \varphi_1^{(m)}(\hat{t})\right\rangle \\ &- \left\langle \frac{1}{2}\alpha_k\sum_{j=1}^{m+1} l_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t})\right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{1}{2}\alpha_k\varsigma, \varphi_1^{(m)}(\hat{t})\right\rangle\end{aligned} \tag{3.21}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{j=1}^{m+1} v_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t})\right\rangle &= \sum_{j=1}^{m+1} v_j^{(m)}\left\langle \varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t})\right\rangle \\ &= v_1^{(m)}\left\langle \varphi_1^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t})\right\rangle + v_2^{(m)}\left\langle \varphi_2^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t})\right\rangle + \ldots \\ &\quad + v_m^{(m)}\left\langle \varphi_m^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t})\right\rangle + v_{m+1}^{(m)}\left\langle \varphi_{m+1}^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t})\right\rangle \\ &= v_1^{(m)}\left\langle \varphi_1^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t})\right\rangle \\ &= v_1^{(m)}h\end{aligned} \tag{3.22}$$

จากสมการ (3.21) พิจารณาเทอมแรกของสมการด้านขวามือจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m+1} u_j^{(m)} \left\langle \varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}u_1^{(m)} \left\langle \varphi_1^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}u_2^{(m)} \left\langle \varphi_2^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle + \ldots \\
&\quad + \frac{1}{2}u_m^{(m)} \left\langle \varphi_m^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}u_{m+1}^{(m)} \left\langle \varphi_{m+1}^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}u_1^{(m)} \left\langle \varphi_1^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}u_1^{(m)} h \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

เช่นเดียวกันในเทอมสองของสมการด้านขวามือของ (3.21) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m+1} l_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m+1} l_j^{(m)} \left\langle \varphi_j^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}l_1^{(m)} \left\langle \varphi_1^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}l_2^{(m)} \left\langle \varphi_2^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle + \ldots \\
&\quad + \frac{1}{2}l_m^{(m)} \left\langle \varphi_m^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}l_{m+1}^{(m)} \left\langle \varphi_{m+1}^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}l_1^{(m)} \left\langle \varphi_1^{(m)}(\hat{t}), \varphi_1^{(m)}(\hat{t}) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}l_1^{(m)} h \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

ลำดับต่อมาพิจารณา

$$
\begin{aligned}
&-\left\langle \frac{1}{2}F'(z_k^\delta(\hat{t}))^*(F(z_k^\delta(\hat{t}))-y^\delta),\varphi_1^{(m)}(\hat{t})\right\rangle \\
&\quad=-\frac{1}{2}\left\langle F'(z_k^\delta(\hat{t}))-y^\delta,F'(z_k^\delta(\hat{t}))\varphi_1^{(m)}(\hat{t})\right\rangle \\
&\quad=-\frac{1}{2}\left\langle F(z_k^\delta(\hat{t}))-y^\delta,F(z_k^\delta(\hat{t}))\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})\varphi_1^{(m)}(\hat{t})d\hat{t}\right\rangle \\
&\quad=\frac{1}{2}\left\langle y^\delta-F(z_k^\delta(\hat{t})),F(z_k^\delta(\hat{t}))\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})\varphi_1^{(m)}(\hat{t})d\hat{t}\right\rangle \\
&\quad=\frac{1}{2}\left\langle y^\delta-\frac{1}{12}exp\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})z_k^\delta(\hat{t})d\hat{t},\frac{1}{12}exp\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})z_k^\delta(\hat{t})d\hat{t}\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})\varphi_1^{(m)}(\hat{t})d\hat{t}\right\rangle
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

จากคุณสมบัติของผลคูณภายในทำให้ (3.25) สามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\langle y^\delta-\frac{1}{12}exp\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})z_k^\delta(\hat{t})d\hat{t},\frac{1}{12}exp\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})z_k^\delta(\hat{t})d\hat{t}\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})\varphi_1^{(m)}(\hat{t})d\hat{t}\right\rangle \\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\left[y^\delta-\frac{1}{12}exp\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})z_k^\delta(\hat{t})d\hat{t}\right] \\
&\quad\times\left[\frac{1}{12}exp\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})z_k^\delta(\hat{t})d\hat{t}\int_0^1 k(\hat{s},\hat{t})\varphi_1^{(m)}(\hat{t})d\hat{t}\right]d\hat{s} \\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\left[y^\delta-\frac{1}{12}exp\left(\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{m+1}l_j^{(m)}\left[k(\hat{s},\hat{t}_j)+k(\hat{s},\hat{t}_{j+1})\right]\right)\right] \\
&\qquad\left[\frac{1}{12}exp\left(\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{m+1}l_j^{(m)}\left[k(\hat{s},\hat{t}_j)+k(\hat{s},\hat{t}_{j+1})\right]\right)\left(\frac{1}{2}h\left[k(\hat{s},\hat{t}_1)+k(\hat{s},\hat{t}_2)\right]\right)\right]d\hat{s}
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

ให้ $\kappa := \frac{1}{12}exp\left(\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{m+1}l_j^{(m)}\left[k(\hat{s},\hat{t}_j)+k(\hat{s},\hat{t}_{j+1})\right]\right)$ ทำให้สมการ (3.25) อยู่ในรูป

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\left\langle F'(z_k^\delta(t))^*(F(z_k^\delta(t))-y^\delta),\varphi_1^{(m)}(\hat{t})\right\rangle \\
&\quad=\frac{1}{2}\int_0^1\left[y^\delta-\kappa(\hat{s})\right]\left[\kappa(\hat{s})\left(\frac{1}{2}h\left[k(\hat{s},\hat{t}_1)+k(\hat{s},\hat{t}_2)\right]\right)\right]d\hat{s} \\
&\quad=\frac{1}{8}h^2\sum_{j=1}^{m+1}\Big[(y^\delta(\hat{s}_j)-\kappa(\hat{s}_j))(\kappa(\hat{s}_j)(k(\hat{s}_j,\hat{t}_1)+k(\hat{s}_j,\hat{t}_2))) \\
&\qquad+(y^\delta(\hat{s}_{j+1})-\kappa(\hat{s}_{j+1}))(\kappa(\hat{s}_{j+1})(k(\hat{s}_{j+1},\hat{t}_1)+k(\hat{s}_{j+1},\hat{t}_2)))\Big] \\
&\quad=\frac{1}{8}h^2\mu(\hat{t}_1,\hat{t}_2)
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

เมื่อ $$\mu(\hat{t}_1,\hat{t}_2) := \sum_{j=1}^{m+1}\Big[(y^\delta(\hat{s}_j)-\kappa(\hat{s}_j))(\kappa(\hat{s}_j)(k(\hat{s}_j,\hat{t}_1)+k(\hat{s}_j,\hat{t}_2))) + (y^\delta(\hat{s}_{j+1})-\kappa(\hat{s}_{j+1}))(\kappa(\hat{s}_{j+1})(k(\hat{s}_{j+1},\hat{t}_1)+k(\hat{s}_{j+1},\hat{t}_2)))\Big]$$

พิจารณาเทอมที่ 4 ของสมการด้านขวามือของ (3.21)

$$\begin{aligned}
-\Big\langle \frac{1}{2}\alpha_k\sum_{j=1}^{m+1} l_j^{(m)}\varphi_j^{(m)}(\hat{t}),\varphi_1^{(m)}(\hat{t})\Big\rangle &= -\frac{1}{2}\alpha_k\sum_{j=1}^{m+1} l_j^{(m)}\Big\langle \varphi_j^{(m)}(\hat{t}),\varphi_1^{(m)}(\hat{t})\Big\rangle\\
&= -\frac{1}{2}\alpha_k\Big[l_1^{(m)}\Big\langle \varphi_1^{(m)}(\hat{t}),\varphi_1^{(m)}(\hat{t})\Big\rangle + \dots\\
&\quad + l_{m+1}^{(m)}\Big\langle \varphi_{m+1}^{(m)}(\hat{t}),\varphi_1^{(m)}(\hat{t})\Big\rangle\\
&= -\frac{1}{2}\alpha_k l_1^{(m)}\Big\langle \varphi_1^{(m)}(\hat{t}),\varphi_1^{(m)}(\hat{t})\Big\rangle\\
&= -\frac{1}{2}\alpha_k l_1^{(m)}h
\end{aligned}\tag{3.28}$$

และเทอมสุดท้ายของสมการด้านขวามือของ (3.21) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\Big\langle \frac{1}{2}\alpha_k\varsigma,\varphi_1^{(m)}(\hat{t})\Big\rangle &= \frac{1}{2}\alpha_k\Big\langle \delta x_*(\hat{t}),\varphi_1^{(m)}(\hat{t})\Big\rangle \quad \text{โดยที่ } x_*(\hat{t})=\hat{t}(1-\hat{t})\\
&= \frac{1}{2}\alpha_k\Big\langle \delta\hat{t}(1-\hat{t}),\varphi_1^{(m)}(\hat{t})\Big\rangle\\
&= \frac{1}{2}\alpha_k\delta\int_0^1 \hat{t}(1-\hat{t})\varphi_1^{(m)}(\hat{t})d\hat{t}\\
&= \frac{1}{2}\alpha_k\delta\int_{t_1}^{t_2} \hat{t}(1-\hat{t})d\hat{t}\\
&= \frac{1}{2}\alpha_k\delta\Big(\Big[\frac{\hat{t}_2^2}{2}-\frac{\hat{t}_2^3}{3}\Big]-\Big[\frac{\hat{t}_1^2}{2}-\frac{\hat{t}_1^3}{3}\Big]\Big)\\
&= \frac{1}{2}\alpha_k g_1^{(m)}
\end{aligned}\tag{3.29}$$

จาก (3.21) - (3.24), (3.27) - (3.29) ทำให้สามารถเขียนสมการ (3.20) ได้ว่า

$$v_1^{(m)}h = \frac{1}{2}u_1^{(m)}h+\frac{1}{2}l_1^{(m)}h+\frac{1}{8}h^2\mu(\hat{t}_1,\hat{t}_2)-\frac{1}{2}\alpha_k l_1^{(m)}h+\frac{1}{2}\alpha_k g_1^{(m)}$$
$$v_1^{(m)} = \frac{1}{2}u_1^{(m)}+\frac{1}{2}l_1^{(m)}+\frac{1}{8}h\mu(\hat{t}_1,\hat{t}_2)-\frac{1}{2}\alpha_k l_1^{(m)}+\frac{1}{2}\frac{1}{h}\alpha_k g_1^{(m)}$$

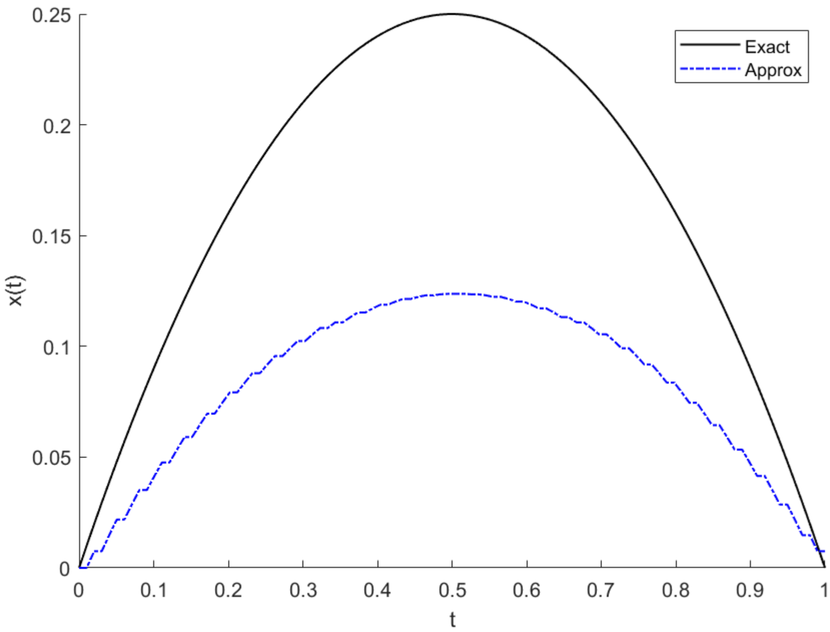
ในทำนองเดียวกันจะได้

$$v_j^{(m)} = \frac{1}{2}u_j^{(m)}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha_k)l_j^{(m)}+\frac{1}{8}h\mu(\hat{t}_j,\hat{t}_{j+1})+\frac{1}{2h}\alpha_k g_j^{(m)} \tag{3.30}$$

และสำหรับ $j = 1, ..., m$ จะได้ว่า

$$V^{(m)} = \frac{1}{2}U^{(m)} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha_k)L^{(m)} + \frac{1}{8}hM(\hat{t}_j, \hat{t}_{j+1}) + \frac{1}{2h}\alpha_k G^{(m)} \tag{3.31}$$

จากสมการ (3.19) และ (3.31) นำมาประมวลผลโดยโปรแกรม MATLAB จะได้ผลลัพธ์ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1: รูปแสดงผลเฉลยของ F(x)=y

รูปที่ 3.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างผลเฉลยจริง (เส้นสีดำเรียบ) และผลเฉลยโดยการประมาณ จากกราฟจะเห็นว่าผลเฉลยโดยการประมาณด้วยวิธีของฮวนสำหรับวิธีเรกกูลาไรเซชันเชิงกำกับแบบปรับปรุงของปัญหาอิลล์โพสแบบไม่เชิงเส้น (เส้นประสีน้ำเงิน) เข้าใกล้ผลเฉลยจริง แต่ยังมีความคลาดเคลื่อนจากผลเฉลยจริงอยู่มาก

บทที่ 4
สรุปผลการศึกษาวิจัย

จากงานวิจัย วิธีแลนด์เวเบอร์ชนิดอาร์-เค แบบปรับปรุง สำหรับปัญหาอิลล์โพสแบบไม่เชิงเส้นของ Wang และคณะ [6] ที่ผู้วิจัยได้ทำการศึกษา รวมถึงงานวิจัยของ นันทวัน [7] ที่ได้ศึกษาวิธีเรกกูลาไรเซชันเชิงกำกับแบบปรับปรุงของปัญหาอิลล์โพสแบบไม่เชิงเส้น ผู้วิจัยพบว่าได้มีการนำเสนอการลู่เข้าสู่ผลเฉลยของปัญหาอิลล์โพสแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะศึกษาปรับปรุงวิธีการประมาณผลเฉลยในทำนองเดียวกัน โดยการนำวิธีของฮวน (Heun's method) ซึ่งเป็นการหาผลเฉลยแบบสองชั้น (2-stage) โดยใช้หลักของการคาดเดา (prediction) และการปรับแก้ (correction) มาใช้ในการหาผลเฉลยของ (1.8) ทำให้ได้สมการ (1.20) และ (1.21) โดยที่สมการ (1.21) เป็นผลเฉลยคาดเดา และสมการ (1.20) เป็นการปรับแก้ค่าประมาณผลเฉลยให้ใกล้เคียงมากขึ้น โดยการวิเคราะห์การลู่เข้าของการทำซ้ำ (1.20) - (1.21) ผู้วิจัยได้พิจารณาค่าพารามิเตอร์ α_k ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (2.1) และพิสูจน์ว่าค่าคลาดเคลื่อนของการทำซ้ำ (1.20) ลดลงทางเดียว และได้ศึกษาการใช้กฎการหยุดด้วยวิธีหลักความแตกต่าง สำหรับงานวิจัยฉบับนี้ผู้วิจัยได้ใช้ตามสมการ (2.9) ซึ่งแตกต่างจากงานวิจัยของ W. Wang โดยเปลี่ยนจาก δ เป็น δ^+

ต่อไปจะเป็นการพิจารณาตัวอย่างเชิงตัวเลข และหาผลเฉลยโดยประมาณด้วยวิธีของฮวนสำหรับวิธีเรกกูลาไรเซชันเชิงกำกับแบบปรับปรุงของปัญหาอิลล์โพสแบบไม่เชิงเส้นนี้ โดยศึกษาจากงานวิจัยของ P Pornsawad [3] โดยกำหนดเกณฑ์การหยุดด้วยหลักความแตกต่างตามสมการ (2.9) โดยจะเห็นได้จาก รูปที่ 3.1 ซึ่งแสดงให้เห็นว่ามีค่าคลาดเคลื่อนกับผลเฉลยจริงอยู่มาก ทั้งนี้หากมีการกำหนดจำนวนรอบของการทำซ้ำที่มากกว่าเดิมจะทำให้ได้ค่าประมาณที่มีความใกล้เคียงกับค่าจริงมากยิ่งขึ้น แต่ถึงแม้ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีของฮวนสำหรับวิธีเรกกูลาไรเซชันเชิงกำกับแบบปรับปรุงของปัญหาอิลล์โพสแบบไม่เชิงเส้นนี้ จะมีค่าคลาดเคลื่อนอยู่มาก แต่ผู้วิจัยก็หวังเป็นอย่างยิ่งว่างานวิจัยฉบับนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้อื่นที่มีความสนใจที่จะดำเนินการปรับปรุงแก้ไข วิธีเรกกูลาไรเซชัน ไม่ว่าจะเป็นการใช้วิธีอื่น หรือการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขค่าเริ่มต้นต่างๆ ที่จะได้มาซึ่งผลลัพธ์ของการลู่เข้าที่ดียิ่งขึ้น

ภาคผนวก

บทนี้เราจะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทต่างๆที่เราได้ละไว้ในการพิสูจน์ในบทข้างต้น

ทฤษฎีบท 4.1. ให้ A เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบนปริภูมิฮิลเบิร์ต H ดังนั้น

$$\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\| \text{ ทุกๆ } x \in H \tag{4.1}$$

บทนิยาม 4.2. ให้ A เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบนปริภูมิฮิลเบิร์ต H ตัวดำเนินการ $A^* : H \to H$ นิยามโดย

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \text{ ทุกๆ } x, y \in H \tag{4.2}$$

เราเรียกตัวดำเนินการ A^* ว่า ตัวดำเนินการผูกพัน (Self-adjoint operator) ของ A

บทนิยาม 4.3. เรากล่าวว่า A เป็นตัวดำเนินการผูกพัน ถ้า $A^* = A$

ทฤษฎีบท 4.4. ให้ A เป็นตัวดำเนินการผูกพันบนปริภูมิฮิลเบิร์ต H ดังนั้น

$$\|A^*\| = \|A\| \tag{4.3}$$

ทฤษฎีบท 4.5. สำหรับทุกๆ $x, y \in H$ โดยอสมการโคชี-ชวาร์ซ (Cauchy-Schwarz inequality) จะได้

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\| \tag{4.4}$$

ทฤษฎีบท 4.6. เรากล่าวว่า a_n เป็นลำดับโคชี (Cauchy sequence) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนนับ N ซึ่งถ้า $n > m \geq N$ แล้ว

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon \tag{4.5}$$

สำหรับตัวดำเนินการไม่เชิงเส้นที่กำหนดโดย

$$(F(x))(s) = e^{\int_0^1 k(s,t)x(t)dt} \tag{4.6}$$

จะได้ทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท 4.7. ถ้า F เป็นตัวดำเนินการที่สามารถหาอนุพันธ์เฟรเชทได้ แล้วค่าอนุพันธ์เฟรเชทจะกำหนดโดย

$$(F'(x)h)(s) = (F(x))(s) \int_0^1 k(s,t)h(t)dt \tag{4.7}$$

ทฤษฎีบท 4.8. กำหนด $\rho > 0$ และ $x_0 \in L^2(0,1)$ แล้วตัวดำเนินการไม้ชิงเส้น F เป็นตัวดำเนินการต่อเนื่องแบบลิปส์ชิทซ์ (Lipschitz-continuous) ใน $B_\rho(x_0)$

จาก [4] สำหรับ

$$\begin{aligned} |(F,(x)h)(s)| &\leqslant |(F(x))(s)| \left| \int_0^1 k(s,t)h(t)dt \right| \\ &\leqslant e^{k\rho_0} k\|h\| \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\|F'(x)h\| \leqslant ke^{k\rho_0}\|h\| \tag{4.8}$$

โดยที่

$$k(s,t) = \begin{cases} s(1-t), & s < t \\ t(1-s), & t \leq s \end{cases}$$

และ

$$\sup_{0 \leq k,s \leq 1} | k(s,t) | \leq 1$$

ให้ค่าคงที่ $k = 1$ และ

$$x_*(t) = t(1-t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{4.9}$$

$$y(s) = e^{(s^4 - 2s^3 + s)/12} \tag{4.10}$$

จาก x_* และ y ที่กำหนดข้างต้นจะสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$F(x_*) = y$$

สำหรับข้อมูลที่มีความคลาดเคลื่อนกำหนดโดย

$$y^\delta(s) := y(s) + \delta cos(100s) \tag{4.11}$$

และสอดคล้องกับ

$$\|y - y^\delta\| \leqslant \delta$$

ถ้าเลือกผลเฉลยค่าเริ่มต้นคือ $x_0 = 0$ จากค่าคงที่ ρ และ ρ_0 ทำให้ได้ว่า

$$\rho_0 = \|x_0\| + \rho = \rho = \|x_0 - x_*\| = \|x_*\| = \frac{1}{\sqrt{30}} \tag{4.12}$$

รายการอ้างอิง

[1] H.W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. Regularization of inverse problems. Kluwer Academic, 1996.

[2] L. Li, B. Han, and W. Wang. R–K type Landweber method for nonlinear ill-posed problems. J. Comput. Appl. Math., 2016.

[3] P. Pornsawad and C Böckmann. Modified iterative runge-kutta-type methods for nonlinear ill-posed problems. Numerical Functional Analysis and Optimization, 37(12):1562--1589, 2016.

[4] O. Scherzer. A modified landweber iteration for solving parameter estimation problems. Appl. Math. Optim., 38:45--68, 1998.

[5] U. Tautenhahn. On the asymptotical regularization method for nonlinear ill-posed problems. Inverse Problems, 10(6):1405--1418, 2008.

[6] W. Wang, B. Han, and L. Li. A Runge–Kutta type modified Landweber method for nonlinear ill-posed problems operator equations. J. Comput. Appl. Math., 212:457--468, 2008.

[7] นันทวัน ทรัพย์สกุล และ พรทรัพย์ พรสวัสดิ์. วิธีเรกกูลาไรเซชั่นเชิงกำกับสำหรับปัญหาอิลล์โพสแบบไม่เชิงเส้น. pages 480--489, 2015.

มหาวิทยาลัยศิลปากร

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	นางสาวชนาภัทร์ สุทธิพันธ์
วัน เดือน ปี เกิด	4 ธันวาคม 2533
สถานที่เกิด	จังหวัดอุดรธานี
วุฒิการศึกษา	พ.ศ. 2552 ปริญญาตรีวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร พ.ศ. 2557 ปริญญาโทวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร
ที่อยู่ปัจจุบัน	24/2 หมู่ 3 ต.ดอนตะโก อ.ท่าศาลา จ.นครศรีธรรมราช 80160