ความเป็นปรกติสำหรับกึ่งกรุปของการแปลงที่สอดคล้องเงื่อนไขที่แน่นอนบางประการ

โดย

นางจิรภา นันทรัตน์กุล

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2561

ความเป็นปรกติสำหรับกึ่งกรุปของการแปลงที่สอดคล้องเงื่อนไขที่แน่นอนบางประการ

โดย
นางจิรภา นันทรัตน์กุล

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2561

REGULARITY FOR THE SEMIGROUP OF TRANSFORMATIONS SATISFYING SOME CERTAIN CONDITIONS

By

MRS. Jirapa NUNTHARATKUL

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for Master of Science (MATHEMATICS STUDY)

Department of MATHEMATICS

Graduate School, Silpakorn University

Academic Year 2018

หัวข้อ	ความเป็นปรกติสำหรับกึ่งกรุปของการแปลงที่สอดคล้องเงื่อนไขที่แน่นอนบางประการ
โดย	จิรภา นันทรัตน์กุล
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. รัตนา ศรีทัศน์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

.... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร.จุไรรัตน์ นันทานิช)

พิจารณาเห็นชอบโดย

.... ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สมพงค์ จิตต์มั่น)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. รัตนา ศรีทัศน์)

.... ผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วรินทร์ ศรีปัญญา)

57316310 : คณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
คำสำคัญ : เฟนซ์, ฟังก์ชันยืนยงอันดับ, ฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัด, ฟังก์ชันแบบบีบอัด, กึ่งกรุปปรกติ, สมาชิกปรกติ

นาง จิรภา นันทรัตน์กุล: ความเป็นปรกติสำหรับกึ่งกรุปของการแปลงที่สอดคล้องเงื่อนไขที่แน่นอนบางประการ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. รัตนา ศรีทัศน์

เฟนซ์ คือเซตอันดับ ซึ่งแผนภาพของอันดับเป็นทางเดินสลับขึ้นลง ให้ $CPO(X)$ แทนกึ่งกรุปของการแปลงยืนยงอันดับแบบบีบอัดบนเฟนซ์จำกัด X ในวิทยานิพนธ์นี้เราจะจำแนกกึ่งกรุป $CPO(X)$ ที่เป็นกึ่งกรุปปรกติ นอกจากนี้ยังสนใจกึ่งกรุป $CP(X)$ ของการแปลงแบบบีบอัดบนเฟนซ์จำกัด X ซึ่งเป็นกึ่งกรุปที่มี $CPO(X)$ เป็นกึ่งกรุปย่อย และเราสามารถให้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอในการเป็นปรกติของ $CP(X)$

57316310 : Major (MATHEMATICS STUDY)

Keyword : FENCES, ORDER-PRESERVING, COMPRESSING ORDER-PRESERVING, COMPRESSING-PRESERVING, REGULAR SEMIGROUP, REGULAR ELEMENTS

MRS. JIRAPA NUNTHARATKUL : REGULARITY FOR THE SEMIGROUP OF TRANSFORMATIONS SATISFYING SOME CERTAIN CONDITIONS THESIS ADVISOR : ASSISTANT PROFESSOR RATANA SRITHUS

A fence is an ordered set that the order forms a path with alternating orientation. Let $CPO(X)$ be the semigroup of all compressing order-preserving transformation on a finite fence X. In this thesis, we characterize the regularity of $CPO(X)$. Moreover, we consider the semigroup $CP(X)$ of all compressing transformations on a finite fence X that $CPO(X)$ is its subsemigroup. A necessary and sufficient condition for $CP(X)$ to be regular is given.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดีนั้น เพราะได้รับความเมตตาและความกรุณาจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รัตนา ศรีทัศน์ ที่ให้คำปรึกษา คำแนะนำ ทำให้โลกทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของผู้วิจัยกว้างขวางขึ้น ช่วยเติมเต็มในจุดบกพร่องต่าง ๆ และแก้ไขในส่วนที่บกพร่องจนทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากรทุกท่านที่ได้ประสิทธิประสาทวิชา พร้อมทั้งหยิบยื่นโอกาสทางการศึกษา และเป็นกำลังใจให้มาโดยตลอดจนทำให้ลูกศิษย์ได้ประสบความสำเร็จ

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพงค์ จิตต์มั่น และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วรินทร์ ศรีปัญญา ประธานกรรมการ และกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ที่กรุณาให้คำแนะนำ ตรวจทานแก้ไขวิทยานิพนธ์ ขอขอบคุณ เพื่อน ๆ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำหรับกำลังใจ น้ำใจ ความช่วยเหลือต่าง ๆ และความจริงใจที่มีให้กันเสมอมา

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณพ่อและคุณแม่ รวมทั้งพี่ ๆ และน้อง ๆ ที่มอบความรัก การดูแล และให้การสนับสนุนช่วยเหลือจนทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จเสร็จสิ้นลงด้วยดี

จิรภา นันทรัตน์กุล

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

ให้ X เป็นเซต และ $T(X)$ เป็นกึ่งกรุปของการแปลงบน X เป็นที่ทราบแล้วว่ากึ่งกรุป $T(X)$ ได้รับการศึกษามาอย่างยาวนานจากนักคณิตศาสตร์หลายท่าน โดยเฉพาะภายใน 50 ปีที่ผ่านมา

แนวคิดของความเป็นปรกติสำหรับกึ่งกรุปคือหนึ่งในหัวข้อที่ได้รับการศึกษาอย่างแพร่หลายในทฤษฎีกึ่งกรุป เป็นที่ทราบกันดีว่า $T(X)$ เป็นกึ่งกรุปปกติ ในขณะที่กึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ ไม่จำเป็นต้องเป็นกึ่งกรุปปรกติ ด้วยเหตุนี้ความเป็นปรกติของกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ จึงเป็นที่สนใจศึกษาโดยนักคณิตศาสตร์หลายท่าน

ใน ปี ค.ศ. 2005 ไปซ์ (PEI, 2005) ได้พิจารณากึ่งกรุปย่อย

$$T_E(X) = \left\{\alpha \in T(X) \,\middle|\, \forall(x,y) \in E, (x\alpha, y\alpha) \in E \right\}$$

ของ $T(X)$ เมื่อ E คือความสัมพันธ์สมมูลบน X และศึกษาความเป็นปรกติของกึ่งกรุปนี้

เราเรียกโครงสร้าง $X = (X;\leq)$ ที่ประกอบไปด้วยเซต X และความสัมพันธ์ทวิภาค $\leq$ ว่า **เซตอันดับ** (ordered set) ถ้า $\leq$ สอดคล้องสมบัติสะท้อน (reflexive) สมบัติปฏิสมมาตร (anti-symmetric) และสมบัติถ่ายทอด (transitive)

สำหรับแต่ละ $A \subseteq X$ เราเรียก $(A;\leq)$ ว่า**เซตอันดับย่อย** (subordered set) ของ X เมื่อ $\leq$ เป็นอันดับของ X

ให้ $X = (X;\leq)$ และ $Y = (Y;\leq)$ เป็นเซตอันดับ เราเรียก $\alpha: X \to Y$ ว่า**ฟังก์ชันยืนยงอันดับ** (order-preserving function) จาก X ไปยัง Y ถ้าสำหรับแต่ละ $x, y \in X$ ถ้า $x \leq y$ ใน X แล้ว $x\alpha \leq y\alpha$ ใน Y

ถ้า $(X;\leq) = (Y;\leq)$ เราเรียก α ว่า**การแปลงยืนยงอันดับ** (order-preserving transformation) ของ $(X;\leq)$ และใช้สัญลักษณ์ $OT(X)$ แทนเซตของการแปลงยืนยงอันดับทั้งหมดบน $(X;\leq)$

เราเรียก α ว่า**ฟังก์ชันยืนยงอันดับบางส่วน** (partial order-preserving function) จาก X ไปยัง Y ถ้า α เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับจากเซตอันดับย่อยของ X ไปยัง Y

ในปี ค.ศ. 2012 ปิง เชาว์ และไม หยาง (ZHAO & YANG, 2012) ศึกษาความเป็นปรกติของกึ่งกรุป CPO_n ของฟังก์ชันบางส่วนยืนยงอันดับแบบบีบอัดทั้งหมดบน $\{1,2, \dots ,n\}$ พวกเขาได้ให้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอในการเป็นกึ่งกรุปปรกติของ CPO_n

$$CPO_n = \{ \alpha \epsilon PO_n \,|(\forall x, y \epsilon dom\alpha), |x\alpha - y\alpha| \leq |x - y| \}$$

เมื่อ PO_n แทนเซตของการแปลงยืนยงอันดับบางส่วนทั้งหมดบน $\{1,2, \dots , n\}$ และเรียก α ว่า **ฟังก์ชันบางส่วนยืนยงอันดับแบบบีบอัด** (compressing order-preserving partial function) บน $\{1,2, \dots , n\}$

ให้ $X = (X; \leq)$ เป็นเซตอันดับ เรากล่าวว่า X เป็น**เซตอันดับเชื่อมโยง** (connected ordered set) ถ้าแต่ละคู่สมาชิก a และ b ใน X จะมี $a_1, a_2, \dots , a_n \in X$ ซึ่ง

$$a = a_1 \leq a_2 \geq a_3 \leq \cdots \geq (\leq) a_n = b \text{ หรือ } a = a_1 \geq a_2 \leq a_3 \geq \cdots \leq (\geq) a_n = b$$

เป็นที่ทราบแล้วว่า ค่าสัมบูรณ์ $|x - y|$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวน คือระยะทางระหว่าง x และ y บนเส้นจำนวนจริง ด้วยเหตุนี้เราจะนิยามฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดบนเซตอันดับเชื่อมโยงได้ในทำนองเดียวกันกับฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดบน $\{1,2, \dots , n\}$ โดยใช้ความหมายของระยะทางระหว่างจุดในเซตอันดับเชื่อมโยง

สำหรับแต่ละเซตอันดับเชื่อมโยง $(X; \leq)$ เรานิยาม**ระยะทาง** (distant) ระหว่างจุด x และ y ใน $(X; \leq)$ ว่าคือจำนวนสมาชิกของเฟนซ์ใน $(X; \leq)$ ที่มีจำนวนสมาชิกน้อยที่สุดซึ่งมี x และ y เป็นสมาชิกลบด้วย 1 นั่นคือ $d(x, y) = \min\{|F| - 1 | F$ เป็นเฟนซ์ใน X ซึ่ง $x, y \in F\}$

ให้ $(X; \leq)$ เป็นเซตอันดับเชื่อมโยง และ $\alpha: X \to X$ เราเรียก α ว่าเป็น**ฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัด** (compressing order-preserving function) บน $(X; \leq)$ ถ้า α เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับบน $(X; \leq)$ และ $d(x\alpha, y\alpha) \leq d(x, y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$

เราใช้สัญลักษณ์ $CPO(X)$ แทนเซตของฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดทั้งหมดบนเซตอันดับเชื่อมโยง $(X; \leq)$ นั่นคือ

$$CPO(X) = \{ \alpha \in OT(X) | \forall x, y \in X, d(x\alpha, y\alpha) \leq d(x, y)\}$$

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกึ่งกรุปของการแปลงยืนยงอันดับแบบบีบอัดส่วนใหญ่จะศึกษาบนเซตอันดับเชิงเส้น (linearly ordered set) หรือโซ่ (chain) ดังนั้นการศึกษากึ่งกรุปของการแปลงยืนยงอันดับบนเซตอันดับที่นอกจากเซตอันดับเชิงเส้นจึงเป็นหัวข้อที่น่าสนใจ เนื่องจากเฟนซ์เป็นเซตอันดับที่ไม่ใช่เซตอันดับเชิงเส้นที่ถูกศึกษามาอย่างยาวนาน เราจึงสนใจศึกษากึ่งกรุปของการแปลงยืนยงอันดับแบบบีบอัดและกึ่งกรุปการแปลงแบบบีบอัดบนเฟนซ์

เฟนซ์ $(X; \leq)$ เป็นเซตอันดับซึ่ง $\leq$ สอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 \leq a_2 \geq a_3, \dots a_{2m-1} \geq a_{2m} \leq a_{2m+1}, \dots$$

หรือ

$$a_1 \geq a_2 \leq a_3, \dots a_{2m-1} \leq a_{2m} \geq a_{2m+1}, \dots$$

สำหรับ $m = 1,2,3, \dots$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งและไม่มีความสัมพันธ์นอกจากนี้ โดยที่ $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

ในทฤษฎีบทกึ่งกรุปหัวข้อที่ถูกศึกษากันอย่างแพร่หลายจนถึงปัจจุบันคือ การหากึ่งกรุปย่อยปรกติแบบใหญ่ที่สุดเฉพาะกลุ่ม (maximal regular subsemigroup) ของกึ่งกรุป $T(X)$ ด้วยเหตุนี้ เราจึงสนใจศึกษาความเป็นปรกติของกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ ที่มีขนาดใหญ่เพื่อที่จะค้นหากึ่งกรุปย่อยปรกติแบบใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของ $T(X)$

เนื่องจากฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดคือฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับและฟังก์ชันแบบบีบอัด จึงได้ว่าถ้าเราลดทอนเงื่อนไขบางประการของฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดนี้ จะสามารถสร้างกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ ซึ่งมีขนาดใหญ่กว่า $CPO(X)$ และในปี ค.ศ. 2016 ตัญญวงษ์ ศรีทัศน์ และชินรัมย์ (TANYAWONG, SRITHUS, & CHINRAM, 2016) ได้จำแนกกึ่งกรุปของฟังก์ชันยืนยงอันดับของเฟนซ์ที่เป็นกึ่งกรุปปรกติทั้งหมดแล้ว ด้วยเหตุข้างต้น เราจึงลดทอนเงื่อนไขการเป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ และพิจารณาแต่เพียงฟังก์ชันแบบบีบอัดเท่านั้น โดยให้ $CP(X)$ แทนกึ่งกรุปของฟังก์ชันแบบบีบอัดทั้งหมดบนเฟนซ์ X ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $CPO(X)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $CP(X)$ จึงทำให้เราสนใจศึกษาความเป็นปรกติของกึ่งกรุปของฟังก์ชันแบบบีบอัดบนเฟนซ์

ดังนั้นในวิทยานิพนธ์นี้จะศึกษาความเป็นปรกติของกึ่งกรุปของฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดบนโซ่และเฟนซ์และฟังก์ชันแบบบีบอัดบนเฟนซ์ โดยเริ่มต้นศึกษาจากการแสดงว่า $CPO(X)$ และ $CP(X)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ โดยแบ่งการศึกษาเป็นดังนี้

ในบทที่ 2 เรารวบรวมบทนิยามและความรู้พื้นฐานที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ในบทที่ 3 เราให้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการเป็นกึ่งกรุปปรกติของกึ่งกรุปดังกล่าว นอกจากนี้ ยังศึกษาสมบัติความเป็นปรกติของสมาชิกในกึ่งกรุปนั้น

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงบทนิยามและความรู้พื้นฐานซึ่งใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

2.1 บทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานของความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

บทนิยาม 2.1.1 ให้ X และ Y เป็นเซต จะเรียก α ว่า **ความสัมพันธ์** (relation) จาก X ไปยัง Y ถ้า $\alpha \subseteq X \times Y$ และเรียก α ว่าความสัมพันธ์บน X ถ้า $\alpha \subseteq X \times X$

สำหรับแต่ละความสัมพันธ์ α จาก X ไปยัง Y เรานิยามความสัมพันธ์ผกผันของ α ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ α^{-1} ว่าคือ $\{(b,a) \in Y \times X | (a,b) \in \alpha\}$

สำหรับแต่ละความสัมพันธ์ $\alpha \subseteq X \times Y$ กำหนดให้ **โดเมน** (domain) ของ α คือเซตของสมาชิกตัวที่หนึ่งของคู่อันดับทั้งหมดใน α ซึ่งเขียนแทนด้วย $dom\alpha$ และ**ภาพ** (image) ของ α คือเซตของสมาชิกตัวที่สองของคู่อันดับทั้งหมดใน α ซึ่งเขียนแทนด้วย $im\alpha$ นั่นคือ

$dom\ \alpha = \{a \in X | \exists b \in Y, (a,b) \in \alpha\}$ และ $im\alpha = \{b \in Y | \exists a \in X, (a,b) \in \alpha\}$
ตามลำดับ

บทนิยาม 2.1.2 ให้ X เป็นเซต และ α, β เป็นความสัมพันธ์บน X **ความสัมพันธ์ประกอบ** (composition relations) ของ α และ β ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\alpha \circ \beta$ นิยามดังนี้

$(a,b) \in \alpha \circ \beta$ ก็ต่อเมื่อ มี $x \in X$ โดยที่ $(a,x) \in \alpha$ และ $(x,b) \in \beta$

นั่นคือ $\alpha \circ \beta = \{(a,b) | \exists x \in X, (a,x) \in \alpha$ และ $(x,b) \in \beta\}$

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เราแทน $\alpha \circ \beta$ ด้วย $\alpha\beta$

บทนิยาม 2.1.3 ให้ X และ Y เป็นเซต เรากล่าวว่า α เป็น**ฟังก์ชัน** (function) จาก X ไปยัง Y ซึ่งใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\alpha: X \to Y$ ถ้า α สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1) α เป็นความสัมพันธ์จาก X ไปยัง Y นั่นคือ $\alpha \subseteq X \times Y$

2) สำหรับแต่ละ $x \in X$ และ $y_1, y_2 \in Y$ ถ้า $(x,y_1), (x,y_2) \in \alpha$ แล้ว $y_1 = y_2$

ถ้า $X = Y$ เราเรียก α ว่า**การแปลง** (transformation) บน X

จากบทนิยาม 2.1.3 ข้อ 2) ทำให้เราสามารถเขียนแทน y ด้วย $x\alpha$ เมื่อ $(x,y) \in \alpha$

บทนิยาม 2.1.4 ให้ X เซต และ $\alpha: Z \to Y$ เรากล่าวว่า α เป็น**ฟังก์ชันบางส่วน** (partial function) จาก X ไปยัง Y ถ้า $Z \subseteq X$

ทฤษฎีบท 2.1.5 ให้ $\alpha: X \to Y$ และ $\beta: Y \to Z$ แล้ว $\alpha\beta$ เป็นฟังก์ชันจาก X ไป Z

เราเรียก $\alpha\beta$ ว่า**ฟังก์ชันประกอบ** (composite function) ของ α และ β

ทฤษฎีบท 2.1.6 ให้ $\alpha : X \to Y$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว $\alpha^{-1}: Y \to X$ เป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ α เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง

เราเรียก α^{-1} ว่าเป็น**ฟังก์ชันผกผัน** (inverse function) ของ α

ทฤษฎีบท 2.1.7 ให้ $\alpha: X \to Y$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจากเซต X ไปยัง Y แล้ว $\alpha^{-1}: Y \to X$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจากเซต Y ไปยัง X

2.2 **บทนิยามของเซตอันดับและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง**

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงบทนิยามพื้นฐานของเซตอันดับและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม 2.2.1 ให้ X เป็นเซตและ $\leq \subseteq X \times X$ เป็นความสัมพันธ์ทวิภาค (binary relation) บน X เรากล่าวว่า $\leq$ เป็น**อันดับ** (order) บน X ถ้า $\leq$ สอดคล้องสมบัติ 3 ข้อต่อไปนี้

1) **สมบัติสะท้อน** (reflexivity) นั่นคือ $x \leq x$ สำหรับทุก ๆ $x \in X$

2) **สมบัติปฏิสมมาตร** (anti-symmetry) นั่นคือ สำหรับแต่ละ $x, y \in X$ ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq x$ แล้ว $x = y$

3) **สมบัติถ่ายทอด** (transitivity) นั่นคือ สำหรับแต่ละ $x, y, z \in X$ ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq z$ แล้ว $x \leq z$

เราเรียกโครงสร้างที่ประกอบไปด้วยเซต X และอันดับ $\leq$ ว่า**เซตอันดับ** (ordered set) และแทนด้วยสัญลักษณ์ $(X; \leq)$ และถ้า X เป็นเซตจำกัด จะเรียก $(X; \leq)$ ว่าเป็น**เซตอันดับจำกัด** (finite ordered set) โดยเขียนแทน $(x, y) \in\leq$ ด้วยสัญลักษณ์ $x \leq y$

บทนิยาม 2.2.2 ให้ $X = (X; \leq)$ และ $Y = (Y; \leq)$ เป็นเซตอันดับ และ $\alpha: X \to Y$ เป็นฟังก์ชัน เราเรียก α ว่าเป็น**ฟังก์ชันยืนยงอันดับ** (order-preserving function) ถ้า $\alpha(x) \leq \alpha(y)$ ใน Y เมื่อไรก็ตามที่ $x \leq y$ ใน X

ถ้า $X = Y$ เราเรียก α ว่า**การแปลงแบบยืนยงอันดับ** (order-preserving transformation) ของ $(X; \leq)$

บทนิยาม 2.2.3 ให้ $(X; \leq)$ เป็นเซตอันดับและ $x, y \in X$ เรากล่าวว่า x และ y **สามารถเปรียบเทียบกันได้** (comparable) ถ้า $x \leq y$ หรือ $y \leq x$

บทนิยาม 2.2.4 ให้ $X = (X; \leq)$ เป็นเซตอันดับ เราเรียก X ว่า**เซตอันดับเชิงเส้น** (linearly ordered set) หรือ**โซ่** (chain) ถ้า $x \leq y$ หรือ $y \leq x$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$

บทนิยาม 2.2.5 ให้ R เป็นความสัมพันธ์บนเซต X และ $\alpha: X \to Y$ เรากล่าวว่า α **ยืนยง** (preserve) R ถ้า $(x\alpha, y\alpha) \in R$ สำหรับทุก ๆ $(x, y) \in R$

ทฤษฎีบท 2.2.6 ให้ $X = (X; \leq), Y = (Y; \leq)$ และ $Z = (Z; \leq)$ เป็นเซตอันดับ และ $\alpha: X \to Y$ และ $\beta: Y \to Z$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ แล้ว $\alpha\beta: X \to Z$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับจากเซตอันดับ X ไปยัง Z

ต่อไปจะให้บทนิยามเซตอันดับที่เรียกว่าเฟนซ์

บทนิยาม 2.2.7 ให้ $X = (X; \leq)$ เป็นเซตอันดับ เรากล่าวว่า X **เป็นเฟนซ์** (fence) ถ้าอันดับ $\leq$ มีรูปแบบความสัมพันธ์สลับขึ้นลงเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง นั่นคือ

$$a_1 \leq a_2 \geq a_3, a_3 \leq a_4 \geq a_5, \dots a_{2m-1} \leq a_{2m} \geq a_{2m+1}, \dots$$

หรือ

$$a_1 \geq a_2 \leq a_3, a_3 \geq a_4 \leq a_5, \dots a_{2m-1} \geq a_{2m} \leq a_{2m+1}, \dots$$

สำหรับ $m = 1,2,3, \dots$ และไม่มีความสัมพันธ์นอกจากนี้ โดย $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

บทนิยาม 2.2.8 ให้ $(X; \leq)$ เป็นเฟนซ์ และ $S \subseteq X$ เรากล่าวว่าเซตอันดับ $S = (S; \leq_s)$ เมื่อ $\leq_s = \leq \cap X^2$ เป็น**เฟนซ์ย่อย** (subfence) ของ X ถ้า S เป็นเฟนซ์

บทนิยาม 2.2.9 ให้ $X = (X; \leq)$ เป็นเซตอันดับ เรากล่าวว่า X เป็น**เซตอันดับเชื่อมโยง** (connected ordered set) ถ้าแต่ละคู่สมาชิก a และ b ใน X จะมี $a_1, a_2, \dots, a_n \in X$ ซึ่ง $a = a_1 \leq a_2 \geq a_3 \leq \cdots \geq (\leq) a_n = b$ หรือ $a = a_1 \geq a_2 \leq a_3 \geq \cdots \leq (\geq) a_n = b$

2.3 บทนิยามของกึ่งกรุปและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานของกึ่งกรุปที่จะใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

บทนิยาม 2.3.1 ให้ X เป็นเซต เราจะเรียก $*$ ว่า**การดำเนินการทวิภาค** (binary operation) บน X ถ้า $*$ เป็นฟังก์ชันจาก $X \times X$ ไปยัง X

นอกจากนี้เราใช้สัญลักษณ์แทน $*(x, y)$ ด้วย $x * y$

บทนิยาม 2.3.2 ให้ X เป็นเซต และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X

1) $*$ มี**สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม** (associative law) ถ้า $(x * y) * z = x * (y * z)$ สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in X$

2) $*$ มี**สมาชิกเอกลักษณ์** (identity element) ในเซต X ถ้ามี $e \in X$ ซึ่ง $e * x = x * e = x$ สำหรับทุก ๆ $x \in X$ และเรียก e ว่าสมาชิกเอกลักษณ์

บทนิยาม 2.3.3 กึ่งกรุป (semigroup) $S = (S,*)$ คือโครงสร้างที่ประกอบด้วยเซต S และการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต S ที่สอดคล้องสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม นั่นคือ $(a * b) * c = a * (b * c)$ สำหรับทุก ๆ $a, b, c \in S$

บทนิยาม 2.3.4 ให้ $(S,\cdot)$ และ $(T,*)$ เป็นกึ่งกรุป เรากล่าวว่า $(S,\cdot)$ เป็น**กึ่งกรุปย่อย** (subsemigroup) ของ $(T,*)$ ถ้า $S \subseteq T$ และ $x \cdot y = x * y$ สำหรับทุก ๆ $x , y \in S$

ต่อไปจะให้บทนิยามของสมาชิกปรกติของกึ่งกรุป

บทนิยาม 2.3.5 ให้ $(S,*)$ เป็นกึ่งกรุป กล่าวว่าสมาชิก a ในเซต S เป็น**สมาชิกปรกติ** (regular element) ถ้ามีสมาชิก $x \in S$ ที่ทำให้ $a = a * x * a$

เราจะเรียกกึ่งกรุป $(S,*)$ ว่า**กึ่งกรุปปรกติ** (regular semigroup) ถ้าทุกสมาชิกของ S เป็นสมาชิกปรกติ

สำหรับแต่ละเซต X กำหนดให้ $T(X)$ แทนกึ่งกรุปของการแปลงทั้งหมดบน X ภายใต้การดำเนินการประกอบของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 2.3.6 ให้ X เป็นเซต แล้ว $T(X)$ เป็นกึ่งกรุปปรกติภายใต้การดำเนินการประกอบ

สำหรับแต่ละเซตอันดับ X เราให้ $OT(X)$ แทนกึ่งกรุปของฟังก์ชันยืนยงอันดับจาก X ไปยัง X ภายใต้การดำเนินการประกอบ

ทฤษฎีบท 2.3.7 ให้ X เป็นเซตอันดับ แล้ว $OT(X)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$

ทฤษฎีบท 2.3.8 ให้ X เป็นโซ่จำกัด แล้ว $OT(X)$ เป็นกึ่งกรุปปรกติ

โดยทั่วไปแล้ว $OT(X)$ อาจไม่เป็นกึ่งกรุปปรกติ

ในปี ค.ศ. 2016 ตัญญวงษ์ ศรีทัศน์ และชินรัมย์ (TANYAWONG et al., 2016) ได้ศึกษาสมบัติของกึ่งกรุปปรกติของการแปลงบนเฟนซ์ ซึ่งเขาได้พิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3.9 ให้ $(X;\leq)$ เป็นเฟนซ์ แล้ว $OT(X)$เป็นกึ่งกรุปปรกติ ก็ต่อเมื่อ $|X| \leq 4$

บทที่ 3

ความเป็นปรกติสำหรับกึ่งกรุปของการแปลงแบบบีบอัด

กำหนดให้ $T(X)$ แทนกึ่งกรุปของการแปลงทั้งหมดบน X ภายใต้การดำเนินการประกอบ $\circ$ ของฟังก์ชัน

สมบัติทางพีชคณิตของกึ่งกรุป $T(X)$ ได้รับการศึกษามาอย่างยาวนาน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ความเป็นปรกติสำหรับกึ่งกรุป เป็นที่ทราบแล้วว่า กึ่งกรุป $T(X)$ เป็นกึ่งกรุปปรกติ ในขณะที่กึ่งกรุปย่อยอาจไม่มีสมบัติดังกล่าว ด้วยเหตุนี้การศึกษาสมบัติความเป็นปรกติของกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ จึงเป็นเรื่องที่น่าสนใจ

สำหรับแต่ละจำนวนนับ n และเซตย่อย $A \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ เราเรียกฟังก์ชัน $\alpha: A \to \{1,2,\dots,n\}$ ว่า**ฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัด** (compressing order-preserving function) จาก A ไปยัง $\{1,2,\dots,n\}$ ถ้า α สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) α เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับจาก $(A;\leq)$ ไปยัง $(\{1,2,\dots,n\};\leq)$ เมื่อ $\leq$ คือความสัมพันธ์น้อยกว่าหรือเท่ากับปรกติของจำนวน

(2) $|x\alpha - y\alpha| \leq |x - y|$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in A$

เราเรียก α ว่า**ฟังก์ชันบางส่วนยืนยงอันดับแบบบีบอัด** (compressing order-preserving partial function) บน $\{1,2,\dots,n\}$ ถ้ามี $A \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ ซึ่ง α เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดจาก A ไปยัง $\{1,2,\dots,n\}$

ในปี ค.ศ. 2012 ปิง เชาว์ และไม หยาง (ZHAO & YANG, 2012) ศึกษาความเป็นปรกติของกึ่งกรุป CPO_n ของฟังก์ชันบางส่วนยืนยงอันดับแบบบีบอัดทั้งหมดบน $\{1,2,\dots,n\}$ พวกเขาได้ให้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอในการเป็นกึ่งกรุปปรกติของ CPO_n

สำหรับแต่ละเซตอันดับเชื่อมโยง $(X;\leq)$ เรานิยาม**ระยะทาง** (distant) ระหว่างจุด x และ y ใน $(X;\leq)$ ว่าคือจำนวนสมาชิกของเฟนซ์ใน $(X;\leq)$ ที่มีจำนวนสมาชิกน้อยที่สุดซึ่งมี x และ y เป็นสมาชิกลบด้วย 1 นั่นคือ $d(x,y) = \min\{|F| - 1 \mid F$ เป็นเฟนซ์ใน X ซึ่ง $x, y \in F\}$

เป็นที่ทราบแล้วว่า ค่าสัมบูรณ์ $|x - y|$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวน คือระยะทางระหว่าง x และ y บนเส้นจำนวนจริง ด้วยเหตุนี้เราจะนิยามฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดได้ในทำนองเดียวกันกับฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดบน $\{1,2,\dots,n\}$ โดยใช้ความหมายของระยะทางระหว่างจุดในเซตเชื่อมโยง

ให้ $(X;\leq)$ เป็นเซตอันดับเชื่อมโยง และ $\alpha: X \to X$ เราเรียก α ว่าเป็น**ฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดบน** $(X;\leq)$ ถ้า α เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับบน $(X;\leq)$ และ $d(x\alpha, y\alpha) \leq d(x,y)$ สำหรับทุก ๆ $x,y \in X$

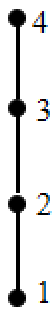
เราใช้สัญลักษณ์ $CPO(X)$ แทนเซตของฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดทั้งหมดบน $(X;\leq)$ นั่นคือ $CPO(X) = \{\alpha \in OT(X) | \forall x,y \in X, d(x\alpha, y\alpha) \leq d(x,y)\}$

ในบทนี้ เราสนใจศึกษาความเป็นปรกติของ $CPO(X)$ เมื่อ X เป็นโซ่และเฟนซ์ ตามลำดับ และในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ เราจะใช้สัญลักษณ์ X แทนเซตอันดับ $(X;\leq)$

3.1 **สมาชิกปรกติของ $CPO(X)$ เมื่อ X เป็นโซ่และเฟนซ์**

เริ่มต้นการศึกษา โดยการแสดงว่าฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดบนโซ่ที่ถูกนิยามโดยระยะทางอาจไม่เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดบนโซ่ที่ถูกนิยามโดยค่าสัมบูรณ์

ตัวอย่าง 3.1.1 พิจารณาเซตอันดับ $(X;\leq)$ เมื่อ $X = \{1,2,3,4\}$ และ $\leq$ แสดงดังรูปข้างล่างนี้



ให้ $\alpha: X \to X$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $1\alpha = 3, 2\alpha = 2 = 3\alpha, 4\alpha = 4$ จะได้ว่า $d(x\alpha, y\alpha) \leq d(x,y)$ สำหรับทุก ๆ $x,y \in X$ จึงได้ว่า α เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดที่ถูกนิยามโดยระยะทาง แต่จาก $|3\alpha - 4\alpha| = |2 - 4| = 2 \not\leq 1 = |3 - 4|$ จึงได้ว่า α ไม่เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดที่ถูกนิยามโดยค่าสัมบูรณ์ ○

ด้วยเหตุนี้ การศึกษากึ่งกรุปของฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดที่นิยามโดยระยะทางจึงเป็นหัวข้อที่น่าสนใจ

ทฤษฎีบท 3.1.2 ให้ X เป็นเซตอันดับเชื่อมโยง แล้ว $CPO(X)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$

บทพิสูจน์ เราจะแสดงว่า $CPO(X)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ โดยการแสดงว่า $CPO(X)$ มีสมบัติปิดภายใต้ ∘

ให้ $\alpha, \beta \in CPO(X)$ จะได้ว่า α และ β เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดบน X นั่นคือ α และ β เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับบน X และ α และ β เป็นฟังก์ชันแบบบีบอัดบน X ตามลำดับ โดยทฤษฎีบท 2.2.6 จะได้ว่า $\alpha\beta$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับบน X

สุดท้ายจะแสดงว่า $\alpha\beta$ เป็นฟังก์ชันแบบบีบอัด

ให้ $x, y \in X$ จาก α เป็นฟังก์ชันแบบบีบอัด จึงได้ว่า $d(x\alpha, y\alpha) \leq d(x, y)$ เพราะว่า β เป็นฟังก์ชันแบบบีบอัด จึงได้ว่า $d((x\alpha)\beta, (y\alpha)\beta) \leq d(x\alpha, y\alpha)$ ทำให้ได้ว่า $d(x\alpha\beta, y\alpha\beta) = d((x\alpha)\beta, (y\alpha)\beta) \leq d(x\alpha, y\alpha) \leq d(x, y)$ ดังนั้น $\alpha\beta$ เป็นฟังก์ชันแบบบีบอัด เพราะฉะนั้น $CPO(X)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ ■

ลำดับต่อไปจะแสดงว่าสำหรับแต่ละโซ่และเฟนซ์ X ฟังก์ชันยืนยงอันดับ α บน X สอดคล้องสมบัติ $d(x\alpha, y\alpha) \leq d(x, y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ ดังแสดงในทฤษฎีบท 3.1.3 และ 3.1.4

ทฤษฎีบท 3.1.3 ให้ X เป็นโซ่ และ α เป็นฟังก์ชันบน X แล้ว α เป็นฟังก์ชันแบบบีบอัดบน X

บทพิสูจน์ ให้ $x, y \in X$ จาก X เป็นโซ่ จะได้ว่า $x \leq y$ หรือ $y \leq x$ ทำให้ได้ว่า $F = \{x, y\}$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X โดยบทนิยามของระยะทางของจุดบนเซตอันดับเชื่อมโยง จะได้ว่า $d(x, y) = |F| - 1 \leq 1$

ถ้า $x = y$ แล้วจาก α เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $x\alpha = y\alpha$ ทำให้ได้ว่า $d(x\alpha, y\alpha) = 0 = d(x, y)$ ต่อไปพิจารณากรณีที่ $x \neq y$ จะได้ว่า $d(x, y) = 1$ เพราะว่า $x\alpha, y\alpha \in X$ จึงได้ว่า $d(x\alpha, y\alpha) \leq 1 = d(x, y)$ ดังนั้น $d(x\alpha, y\alpha) \leq d(x, y)$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.4 ให้ X เป็นเฟนซ์ ถ้า $\alpha \in OT(X)$ แล้ว α เป็นฟังก์ชันแบบบีบอัดบน X

บทพิสูจน์ สมมติว่า $\alpha \in OT(X)$ และให้ $x, y \in X$

ถ้า $x = y$ แล้ว $x\alpha = y\alpha$ จะได้ $d(x\alpha, y\alpha) = 0 = d(x, y)$ ทำให้ได้ว่า $d(x\alpha, y\alpha) \leq d(x, y)$

ต่อไปพิจารณากรณีที่ $x \neq y$ สมมติว่า $d(x, y) = k$

โดยไม่เสียนัยความเป็นทั่วไปสมมติว่ามี $x = a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k = y$ ซึ่ง

$$x = a_0 < a_1 > a_2 < \cdots > a_{k-1} < a_k = y$$

จาก α เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ จะได้ว่า

$$x\alpha = a_0\alpha \leq a_1\alpha \geq a_2\alpha \leq \cdots \geq a_{k-1}\alpha \leq a_k\alpha = y\alpha$$

ทำให้ได้ว่า $|\{a_0\alpha, a_1\alpha, a_2\alpha, \dots, a_{k-1}\alpha, a_k\alpha\}| \leq k+1$

ดังนั้น $d(x\alpha, y\alpha) \leq |\{a_0\alpha, a_1\alpha, a_2\alpha, \dots, a_{k-1}\alpha, a_k\alpha\}| - 1 \leq k+1-1 = d(x,y)$ ∎

เนื่องจากฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดจะต้องเป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับเสมอ จึงได้ว่า $CPO(X) \subseteq OT(X)$ จากทฤษฎีบท 3.1.3 และ 3.1.4 เราได้ว่าแต่ละฟังก์ชันยืนยงอันดับบนโซ่และเฟนซ์จะเป็นฟังก์ชันแบบบีบอัด จึงได้ว่าฟังก์ชันยืนยงอันดับจะเป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดเสมอ ทำให้ได้ว่า $OT(X) \subseteq CPO(X)$ เมื่อ X เป็นโซ่และเฟนซ์ ดังนั้น $CPO(X) = OT(X)$ เมื่อ X เป็นโซ่และเฟนซ์

เป็นที่ทราบแล้วว่า ถ้า X เป็นโซ่จำกัด แล้ว $OT(X)$ เป็นกึ่งกรุปปรกติ (HIGGINS, MITCHELL, & RUSKUC, 2003) และทฤษฎีบท 3.1.5 เป็นผลโดยตรงจากข้างต้น

ทฤษฎีบท 3.1.5 ให้ X เป็นโซ่จำกัด แล้ว $CPO(X)$ เป็นกึ่งกรุปปรกติ

ในปี ค.ศ. 2016 ตัญญวงษ์ ศรีทัศน์ และชินรัมย์ (TANYAWONG et al., 2016) ได้จำแนกกึ่งกรุปของฟังก์ชันยืนยงอันดับของเฟนซ์ที่เป็นกึ่งกรุปปรกติทั้งหมด นั่นคือเขาพิสูจน์ได้ว่ากึ่งกรุป $OT(X)$ เมื่อ X เป็นเฟนซ์ เป็นกึ่งกรุปปรกติ ก็ต่อเมื่อ $|X| \leq 4$ ด้วย $CPO(X) = OT(X)$ เมื่อ X เป็นเฟนซ์ ทฤษฎีบท 3.1.6 เป็นผลโดยตรงจากการจำแนกข้างต้น ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1.6 ให้ X เป็นเฟนซ์ แล้ว $CPO(X)$ เป็นกึ่งกรุปปรกติ ก็ต่อเมื่อ $|X| \leq 4$

3.2 **สมาชิกปรกติของ $CP(X)$ เมื่อ X เป็นเฟนซ์**

ในทฤษฎีบทกึ่งกรุปหัวข้อที่ถูกศึกษากันอย่างแพร่หลายจนถึงปัจจุบันคือ การหากึ่งกรุปย่อยปรกติแบบใหญ่ที่สุดเฉพาะกลุ่ม (maximal regular subsemigroup) ของกึ่งกรุป $T(X)$ ด้วยเหตุนี้เราจึงสนใจศึกษาความเป็นปรกติของกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ ที่มีขนาดใหญ่เพื่อที่จะค้นหากึ่งกรุปย่อยปรกติแบบใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของ $T(X)$

เนื่องจากฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดคือฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับและฟังก์ชันแบบบีบอัด จึงได้ว่าถ้าเราลดทอนเงื่อนไขบางประการของฟังก์ชันยืนยงอันดับแบบบีบอัดนี้ จะ

สามารถสร้างกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ ซึ่งมี $CPO(X)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยได้ เป็นที่ทราบแล้วว่า ความเป็นปรกติของกึ่งกรุปของฟังก์ชันยืนยงอันดับของเฟนซ์ได้ถูกศึกษาเป็นที่เรียบร้อยแล้ว จึงทำให้ในวิทยานิพนธ์ จะสนใจศึกษากึ่งกรุปของฟังก์ชันแบบบีบอัดบนเฟนซ์

สำหรับแต่ละเซตอันดับเชื่อมโยง กำหนดให้ $CP(X)$ แทนเซตของฟังก์ชันแบบบีบอัดทั้งหมดบน $(X;\leq)$ นั่นคือ $CP(X) = \{\alpha \in T(X) | \forall x, y \in X, d(x\alpha, y\alpha) \leq d(x, y)\}$ เห็นได้ชัดว่า $CPO(X) \subseteq CP(X)$

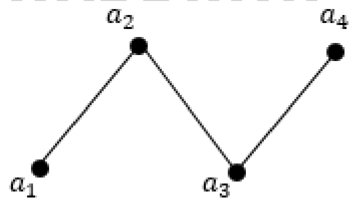
เริ่มต้นการศึกษา โดยการตรวจสอบว่า $CP(X)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ หรือไม่

ทฤษฎีบท 3.2.1 ให้ X เป็นเฟนซ์ แล้ว $CP(X)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$
บทพิสูจน์ เราจะแสดงว่า $CP(X)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ โดยการแสดงว่า $CP(X)$ มีสมบัติปิดภายใต้ $\circ$

ให้ $\alpha, \beta \in CP(X)$ และให้ $x, y \in X$ จาก α เป็นฟังก์ชันแบบบีบอัด จึงได้ว่า $d(x\alpha, y\alpha) \leq d(x, y)$ จาก β เป็นฟังก์ชันแบบบีบอัด จึงได้ว่า $d((x\alpha)\beta, (y\alpha)\beta) \leq d(x\alpha, y\alpha)$ ทำให้ได้ว่า $d(x\alpha\beta, y\alpha\beta) \leq d(x, y)$ นั่นคือ $\alpha\beta$ เป็นฟังก์ชันแบบบีบอัด ดังนั้น $CP(X)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ ∎

เป็นที่ทราบแล้วว่า $CPO(X) \subseteq CP(X)$ ตัวอย่าง 3.2.2 จะแสดงให้เห็นว่า $CP(X)$ อาจไม่เป็นเซตย่อยของ $CPO(X)$

ตัวอย่าง 3.2.2 พิจารณาเฟนซ์ $X = (X;\leq)$ ที่มี 4 สมาชิก ซึ่งมีความสัมพันธ์ดังรูปข้างล่างนี้



ให้ $\alpha: X \to X$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $a_1\alpha = a_1 = a_4\alpha, a_2\alpha = a_2 = a_3\alpha$ จะได้ว่า α เป็นฟังก์ชันแบบบีบอัด แต่ α ไม่เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ ทั้งนี้เป็นเพราะว่า $a_3 < a_4$ แต่ $a_3\alpha \nless a_4\alpha$ ○

โดยทั่วไป $CP(X)$ อาจไม่เป็นเซตย่อยของ $CPO(X)$ ซึ่งเป็นกึ่งกรุปที่ได้จำแนกความเป็นปรกติเป็นที่เรียบร้อยแล้ว ด้วยเหตุนี้การศึกษากึ่งกรุป $CP(X)$ จึงเป็นหัวข้อที่น่าสนใจ ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะให้เงื่อนไขเพียงพอในการเป็นสมาชิกปรกติใน $CP(X)$

ทฤษฎีบท 3.2.3 ให้ X เป็นเฟนซ์ และ $\alpha \in CP(X)$ ถ้า $|im\alpha| = 1$ แล้ว α เป็นสมาชิกปรกติใน $CP(X)$

บทพิสูจน์ ให้ $\alpha \in CP(X)$ โดยที่ $|im\alpha| = 1$ สมมติว่า $x\alpha = a$ สำหรับทุก ๆ $x \in X$ จะได้ว่า $x\alpha^3 = \big((x\alpha)\alpha\big)\alpha = (a\alpha)\alpha = a\alpha = a = x\alpha$ ดังนั้น α สมาชิกปรกติใน $CP(X)$ ■

พิจารณา $\alpha \in CP(X)$ ซึ่ง $im\alpha$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X ทฤษฎีบท 3.2.4 จะให้เงื่อนไขเพียงพอในสำหรับ α ในการเป็นสมาชิกปรกติของ $CP(X)$

ทฤษฎีบท 3.2.4 ให้ X เป็นเฟนซ์ และ $\alpha \in CP(X)$ ซึ่ง $im\alpha$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X ถ้ามี Y เป็นเฟนซ์ย่อยของ X ซึ่ง $\alpha|_Y$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจาก Y ไปยัง $im\alpha$ แล้ว α เป็นสมาชิกปรกติใน $CP(X)$ นอกจากนี้จะมี $\beta \in CP(X)$ ซึ่ง $im\beta$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X ที่ทำให้ $\alpha\beta\alpha = \alpha$

บทพิสูจน์ ให้ X เป็นเฟนซ์ และ $\alpha \in CP(X)$ ซึ่ง $im\alpha$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X

สมมติว่ามี Y เป็นเฟนซ์ย่อยของ X ซึ่ง $\alpha|_Y$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจาก Y ไปยัง $im\alpha$

ให้ $\gamma = \alpha|_Y : Y \to im\alpha$ จาก $\alpha|_Y$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจาก Y ไปยัง $im\alpha$ และทฤษฎีบท 2.1.7 จะได้ว่า γ^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจาก $im\alpha$ ไปยัง Y

จะแสดงว่า α เป็นสมาชิกปรกติใน $CP(X)$

ให้ a, b เป็นจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของ $im\alpha$ ใน X และ a_+, b_+ เป็นจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของ X

กำหนดให้ X_a เป็นเฟนซ์ที่มี a_+ เป็นจุดเริ่มต้น a เป็นจุดสิ้นสุด และ X_b เป็นเฟนซ์ที่มี b เป็นจุดเริ่มต้น b_+ เป็นจุดสิ้นสุด แล้ว $X = X_a \cup X_b \cup im\alpha$ เราจะนิยาม $\beta : X \to Y$ คือ

$$x\beta = \begin{cases} x\gamma^{-1}; & x \in im\alpha \\ a\gamma^{-1}; & x \in X_a \\ b\gamma^{-1}; & x \in X_b \end{cases}$$

ให้ $x, y \in X$ จะแสดงว่า $d(x\beta, y\beta) \leq d(x, y)$

<u>กรณีที่ 1</u> $x \in im\alpha$ และ $y \in im\alpha$ จะมี $x', y' \in Y$ ซึ่ง $x'\gamma = x$ และ $y'\gamma = y$ นั่นคือ $x\gamma^{-1} = x'$ และ$y\gamma^{-1} = y'$ จะได้ว่า $d(x\beta, y\beta) = d(x\gamma^{-1}, y\gamma^{-1}) = d(x', y') = d(x'\gamma, y'\gamma) = d(x, y)$

<u>กรณีที่ 2</u> $x \notin im\alpha$ และ $y \notin im\alpha$ พิจารณาเป็น 4 กรณี ดังนี้

<u>กรณีที่ 2.1</u> $x, y \in X_a$ จะได้ว่า $d(x\beta, y\beta) = d(a\gamma^{-1}, a\gamma^{-1}) = d(a, a) = 0 \leq d(x, y)$

<u>กรณีที่ 2.2</u> $x, y \in X_b$ จะได้ว่า $d(x\beta, y\beta) = d(b\gamma^{-1}, b\gamma^{-1}) = d(b, b) = 0 \leq d(x, y)$

<u>กรณีที่ 2.3</u> $x \in X_a, y \in X_b$ จะได้ว่า $d(x\beta, y\beta) = d(a\gamma^{-1}, b\gamma^{-1}) = d(a, b) \leq d(x, y)$

<u>กรณีที่ 2.4</u> $x \in X_b, y \in X_a$จะได้ว่า $d(x\beta, y\beta) = d(b\gamma^{-1}, a\gamma^{-1}) = d(b, a) = d(a, b) \leq d(x, y)$

<u>กรณีที่ 3</u> $x \in im\alpha$ และ $y \notin im\alpha$ พิจารณาเป็น 2 กรณี ดังนี้

<u>กรณีที่ 3.1</u> $y \in X_a$ จาก $x, a \in im\alpha$ จะมี $x', a' \in Y$ ซึ่ง $x'\gamma = x$ และ $a'\gamma = a$ นั่นคือ $x\gamma^{-1} = x'$ และ $a\gamma^{-1} = a'$ จะได้ว่า $d(x\beta, y\beta) = d(x\gamma^{-1}, a\gamma^{-1}) = d(x', a') = d(x'\gamma, a'\gamma) = d(x, y)$

<u>กรณีที่ 3.2</u> $y \in X_b$ จาก $x, b \in im\alpha$ จะมี $x', b' \in Y$ ซึ่ง $x'\gamma = x$ และ $b'\gamma = b$ นั่นคือ $x\gamma^{-1} = x'$ และ $b\gamma^{-1} = b'$ จะได้ว่า $d(x\beta, y\beta) = d(x\gamma^{-1}, b\gamma^{-1}) = d(x', b') = d(x'\gamma, b'\gamma) = d(x, y)$

<u>กรณีที่ 4</u> $x \notin im\alpha, y \in im\alpha$ พิจารณาเป็น 2 กรณี ดังนี้

<u>กรณีที่ 4.1</u> $x \in X_a$ จะได้ว่า $a, y \in im\alpha$ จะมี $a', y' \in Y$ ซึ่ง $a'\gamma = a$ และ $y'\gamma = y$ นั่นคือ $a\gamma^{-1} = a'$ และ$y\gamma^{-1} = y'$ จะได้ว่า $d(x\beta, y\beta) = d(a\gamma^{-1}, y\gamma^{-1}) = d(a', y') = d(a'\gamma, y'\gamma) = d(x, y)$

<u>กรณีที่ 4.2</u> $x \in X_b$ จะได้ว่า $b, y \in im\alpha$ จะมี $b', y' \in Y$ ซึ่ง $b'\gamma = b$ และ $y'\gamma = y$ นั่นคือ $b\gamma^{-1} = b'$ และ$y\gamma^{-1} = y'$ จะได้ว่า $d(x\beta, y\beta) = d(b\gamma^{-1}, y\gamma^{-1}) = d(b', y') = d(b'\gamma^{-1}, y'\gamma^{-1}) = d(x, y)$

จากทั้ง 4 กรณี จะได้ว่า $\beta \in CP(X)$

ต่อไปจะแสดงว่า $im\beta$ เป็นเฟนซ์

จาก $\gamma: Y \to im\alpha$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงจาก Y ไปยัง $im\alpha$ จะได้ว่า $\gamma^{-1} : im\alpha \to Y$ ทำให้ได้ว่า $(im\alpha)\gamma^{-1} = Y$ นั่นคือ $(im\alpha)\beta = Y$ และเนื่องจาก $X_a\,\beta = \{a\} \subseteq Y$,$X_b\,\beta = \{b\} \subseteq Y$ และ $X = X_a \cup X_b \cup im\alpha$ จึงได้ว่า $X\beta = Y$

สุดท้ายจะแสดงว่า $\alpha\beta\alpha = \alpha$

ให้ $x \in X$ จะได้ว่า $x\alpha\beta\alpha = (x\alpha)\beta\alpha = \big((x\alpha)\gamma^{-1}\big)\alpha|_Y = (x\alpha)(\gamma^{-1}\gamma) = (x\alpha)id_{im\alpha} = x\alpha$ ดังนั้น α เป็นสมาชิกปรกติใน $CP(X)$ ■

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า แต่ละฟังก์ชันใน $CP(X)$ ซึ่งมีอิมเมจเป็นเฟนซ์จะยืนยงการเป็นเฟนซ์เสมอ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2.5 ให้ X เป็นเฟนซ์ และ $\alpha \in CP(X)$ ถ้า $im\alpha$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X และ S เป็นเฟนซ์ย่อยของ X แล้ว $S\alpha$ เป็นเฟนซ์ย่อย

บทพิสูจน์ ให้ X เป็นเฟนซ์ และ $\alpha \in CP(X)$ ซึ่ง $im\alpha$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X และ S เป็นเฟนซ์ย่อยของ X

สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ " ถ้า $|S| = n$ แล้ว $S\alpha$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X "

สมมติว่า $|S| = 1$ และให้ $S = \{a\}$ จะได้ว่า $S\alpha = \{a\alpha\}$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X

ต่อไปให้ $k \in \mathbb{N}$ และสมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือข้อความ " ถ้า $|S| = k$ แล้ว $S\alpha$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X " เป็นจริง ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือแสดงว่า " ถ้า $|S| = k+1$ แล้ว $S\alpha$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X "

สมมติว่า $|S| = k+1$ และให้ $S = \{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+k}\}$ โดยที่ $a_i < a_{i+1} > a_{i+2} < \cdots > (<) a_{i+k}$ ให้ $S' = S - \{a_{i+k}\}$ จะได้ว่า $S - \{a_{i+k}\}$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X และ $|S - \{a_{i+k}\}| = k$ จากสมมติฐานจะได้ว่า $S'\alpha$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X เนื่องจาก $d(a_{i+(k-1)}, a_{i+k}) = 1$ และ α เป็นฟังก์ชันแบบบีบอัด จะได้ว่า $d(a_{i+(k-1)}\alpha, a_{i+k}\alpha) \leq d(a_{i+(k-1)}, a_{i+k}) = 1$

พิจารณา $d(a_{i+(k-1)}\alpha, a_{i+k}\alpha)$ เป็น 2 กรณี

<u>กรณีที่ 1</u> $d(a_{i+(k-1)}\alpha, a_{i+k}\alpha) = 0$ จะได้ว่า $a_{i+(k-1)}\alpha = a_{i+k}\alpha$ ทำให้ได้ว่า $S\alpha = S'\alpha$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X

<u>กรณีที่ 2</u> $d(a_{i+(k-1)}\alpha, a_{i+k}\alpha) = 1$ จะได้ว่า $a_{i+(k-1)}\alpha$ และ $a_{i+k}\alpha$ สามารถเปรียบเทียบกันได้ สมมติว่า $a_{i+(k-1)}\alpha = a_l$ จะได้ว่า $a_{i+k}\alpha \in \{a_{l-1}, a_{l+1}\}$

ถ้า $a_{i+(k-1)}\alpha$ เป็นจุดปลายของ $S'\alpha$ แล้วจะได้ว่า $S\alpha = S'\alpha \cup \{a_{i+k}\alpha\}$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X

ถ้า $a_{i+(k-1)}\alpha$ ไม่ใช่จุดปลายของ $S'\alpha$ แล้ว a_l ไม่ใช่จุดปลายของ $S'\alpha$ จะได้ว่า $\{a_{l-1}, a_l, a_{l+1}\} \subseteq S'\alpha$ ทำให้ได้ว่า $a_{i+k}\alpha \in S'$ ดังนั้น $S\alpha = S'\alpha$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X

ดังนั้น $S\alpha$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X ■

ทฤษฎีบทต่อไปจะให้เงื่อนไขเพียงพอในการเป็นสมาชิกปรกติใน $CP(X)$ ที่มีอิมเมจเป็นเฟนซ์ย่อยของ X

ทฤษฎีบท 3.2.6 ให้ X เป็นเฟนซ์ และ $\alpha \in CP(X)$ ซึ่ง $im\alpha$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X ถ้า $|im\alpha| = 2$ แล้ว α เป็นสมาชิกปรกติใน $CP(X)$

บทพิสูจน์ ให้ X เป็นเฟนซ์ และ $\alpha \in CP(X)$ ซึ่ง $im\alpha$ เป็นเฟนซ์ย่อยของ X

สมมติว่า $|im\alpha| = 2$ และให้ $im\alpha = \{a, b\}$ จะมี $c, d \epsilon X$ ซึ่ง $c < d$ จะได้ $d(c\alpha, d\alpha) = 1$ นั่นคือ $c\alpha = a$ และ $d\alpha = b$ หรือ $c\alpha = b$ และ $d\alpha = a$

โดยไม่เสียนัยความเป็นทั่วไป สมมติว่า $c\alpha = a$ และ $d\alpha = b$ เรานิยาม $\beta: X \to X$ ดังนี้

$$x\beta = \begin{cases} d\ ; x = b \\ c\ ; x \neq b \end{cases}$$

ให้ $x, y \in X$ จะแสดงว่า $d(x\beta, y\beta) \leq d(x, y)$

จาก $|im\alpha| = 2$ จะได้ $d(x\beta, y\beta) \leq 1$ นั่นคือ $d(x\beta, y\beta) = 0$ หรือ $d(x\beta, y\beta) = 1$

ถ้า $d(x\beta, y\beta) = 0$ แล้วจาก $d(x, y) \geq 0$ จะได้ว่า $d(x\beta, y\beta) \leq d(x, y)$

ต่อไปพิจารณากรณี $d(x\beta, y\beta) = 1$ สมมติว่า $d(x, y) = 0$ จะได้ว่า $x = y$ นั่นคือ $x\beta = y\beta$ ทำให้ได้ว่า $d(x\beta, y\beta) = 0$ ดังนั้น $d(x, y) \neq 0$ ทำให้ได้ว่า $d(x\beta, y\beta) \leq 1 \leq d(x, y)$ เพราะฉะนั้น $\beta \in CP(X)$

ต่อไปจะแสดงว่า $\alpha\beta\alpha = \alpha$

ให้ $x \in X$ พิจารณาเป็น 2 กรณี ดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> $x = d$ จะได้ว่า $x\alpha\beta\alpha = b\beta\alpha = d\alpha = x\alpha$

<u>กรณีที่ 2</u> $x \neq d$ จาก $im\alpha = \{a, b\}$ จะได้ $x\alpha = a$ หรือ $x\alpha = b$

ถ้า $x\alpha = a$ แล้ว $x\alpha\beta\alpha = a\beta\alpha = c\alpha = a = x\alpha$

ถ้า $x\alpha = b$ แล้ว $x\alpha\beta\alpha = b\beta\alpha = d\alpha = b = x\alpha$

ดังนั้น α เป็นสมาชิกปรกติใน $CP(X)$ ■

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นผลจากทฤษฎีบท 3.2.6

ทฤษฎีบท 3.2.7 ให้ X เป็นเฟนซ์ ซึ่ง $|X| = 2$ แล้ว $CP(X)$ เป็นกึ่งกรุปปรกติ

บทพิสูจน์ ให้ X เป็นเฟนซ์ ซึ่ง $|X| = 2$ และให้ $\alpha \in CP(X)$

ถ้า $|im\alpha| = 1$ แล้ว α เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว จะได้ว่า α เป็นสมาชิกปรกติ

ถ้า $|im\alpha| = 2$ แล้วจากทฤษฎีบท 3.2.6 จะได้ว่า α เป็นสมาชิกปรกติ

ดังนั้น $CP(X)$ เป็นกึ่งกรุปปรกติ ■

ต่อไปจะตรวจสอบความเป็นปรกติของกึ่งกรุป $CP(X)$ ของเฟนซ์ X ที่มี 3 สมาชิก

ทฤษฎีบท 3.2.8 ให้ X เป็นเฟนซ์ ซึ่ง $|X| = 3$ แล้ว $CP(X)$ เป็นกึ่งกรุปปรกติ

บทพิสูจน์ ให้ X เป็นเฟนซ์ ซึ่ง $|X| = 3$ และให้ $\alpha \in CP(X)$

ถ้า $|im\alpha| = 1$ แล้ว α เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว จะได้ว่า α เป็นสมาชิกปรกติ

ถ้า $|im\alpha| = 2$ แล้วจากทฤษฎีบท 3.2.6 จะได้ว่า α เป็นสมาชิกปรกติ

ต่อไปพิจารณากรณี $|im\alpha| = 3$ จาก $|X| = 3$ จะได้ว่า α เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง จากทฤษฎีบท 3.2.4 จะได้ว่า α เป็นสมาชิกปรกติ ดังนั้น $CP(X)$ เป็นกึ่งกรุปปรกติ ■

จากผลของทฤษฎีบท 3.2.3, 3.2.7 และ 3.2.8 เราสรุปได้ว่า ถ้า $|X| \leq 3$ แล้ว $CP(X)$ เป็นกึ่งกรุปปรกติ ในทฤษฎีต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า ถ้า $|X| \geq 4$ แล้ว $CP(X)$ ไม่เป็นกึ่งกรุปปรกติ

ทฤษฎีบท 3.2.9 ให้ X เป็นเฟนซ์จำกัด ซึ่ง $|X| \geq 4$ แล้ว $CP(X)$ ไม่เป็นกึ่งกรุปปรกติ

บทพิสูจน์ ให้ X เป็นเฟนซ์จำกัด ซึ่ง $|X| \geq 4$ สมมติว่า $|X| = n$ นั่นคือ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ ซึ่ง $a_0 < a_1 > a_2 < \cdots > a_{n-1} < a_n$ เรานิยาม $\alpha: X \to X$ ดังนี้

$$x\alpha = \begin{cases} a_1\,; x = a_1 \\ a_3\,; x = a_n \\ a_2\,; x \notin \{a_1, a_n\} \end{cases}$$

ให้ $x, y \in X$ จะแสดงว่า $d(x\alpha, y\alpha) \leq d(x, y)$

<u>กรณีที่ 1</u> $x = a_1$ พิจารณา 3 กรณี ดังนี้

ถ้า $y = a_1$ แล้ว $x = y$ ทำให้ได้ว่า $x\alpha = a_1 = y\alpha$ ดังนั้น $d(x\alpha, y\alpha) = 0 = d(x, y)$

ถ้า $y = a_n$ แล้ว $x\alpha = a_1$ และ $y\alpha = a_3$ ดังนั้น $d(x\alpha, y\alpha) = 2 \leq d(x, y)$

ถ้า $y \notin \{a_1, a_n\}$ แล้ว $x\alpha = a_1$ และ $y\alpha = a_2$ ดังนั้น $d(x\alpha, y\alpha) = 1 \leq d(x, y)$

<u>กรณีที่ 2</u> $x = a_n$ พิจารณา 3 กรณี ดังนี้

ถ้า $y = a_1$ แล้ว $x\alpha = a_3$ และ $y\alpha = a_1$ ดังนั้น $d(x\alpha, y\alpha) = 2 \leq d(x, y)$

ถ้า $y = a_n$ แล้ว $x = y$ ทำให้ได้ว่า $x\alpha = a_3 = y\alpha$ ดังนั้น $d(x\alpha, y\alpha) = 0 = d(x, y)$

ถ้า $y \notin \{a_1, a_n\}$ แล้ว $x\alpha = a_3$ และ $y\alpha = a_2$ ดังนั้น $d(x\alpha, y\alpha) = 1 \leq d(x, y)$

<u>กรณีที่ 3</u> $x \notin \{a_1, a_n\}$ พิจารณา 3 กรณี ดังนี้

ถ้า $y = a_1$ แล้ว $x\alpha = a_2$ และ $y\alpha = a_1$ ดังนั้น $d(x\alpha, y\alpha) = 1 \leq d(x, y)$

ถ้า $y = a_n$ แล้ว $x\alpha = a_2$ และ $y\alpha = a_3$ ดังนั้น $d(x\alpha, y\alpha) = 1 \leq d(x, y)$

ถ้า $y \notin \{a_1, a_n\}$ แล้ว $x = y$ ทำให้ได้ว่า $x\alpha = a_2 = y\alpha$ดังนั้น $d(x\alpha, y\alpha) = 0 = d(x, y)$

จากทั้ง 3 กรณี จะได้ว่า $\alpha \in CP(X)$

ต่อไปจะแสดงว่า α ไม่เป็นสมาชิกปรกติ

สมมติ α เป็นสมาชิกปรกติ จะมี $\beta \in CP(X)$ ซึ่ง $\alpha\beta\alpha = \alpha$ ถ้า $x = a_1$ แล้ว $a_1 = a_1\alpha = a_1\alpha\beta\alpha = a_1\beta\alpha$ โดยบทนิยามของ α จะได้ว่า $a_1\beta = a_1$ ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $a_3\beta = a_n$ ถ้า $x = a_n$ และถ้า $x = a_2$แล้ว $a_2 = a_2\alpha = a_2\alpha\beta\alpha = a_2\beta\alpha$ โดยบทนิยามของ α จะได้ว่า $a_2\beta \notin \{a_1, a_n\}$ จาก $d(a_1, a_2) \geq d(a_1\beta, a_2\beta) = d(a_1, a_2\beta)$ จะได้ว่า $a_2\beta \in \{a_1, a_2\}$ แต่ $a_2\beta \neq a_1$ ดังนั้น $a_2\beta = a_2$ จาก $1 = d(a_2, a_3) \geq d(a_2\beta, a_3\beta) = d(a_2, a_n)$ จะได้ว่า $d(a_2, a_n) \leq 1$ เพราะว่า $|X| \geq 4$ จึงได้ว่า $d(a_2, a_n) \geq 2$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น α ไม่เป็นสมาชิกปรกติ ทำให้ได้ว่า $CP(X)$ ไม่เป็นกึ่งกรุปปรกติ ■

ผลจากทฤษฎีบท 3.2.7, 3.2.8 และ 3.2.9 ทำให้เราได้การจำแนกการเป็นกึ่งกรุปปรกติของกึ่งกรุป $CP(X)$ เมื่อ ให้ X เป็นเฟนซ์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2.10 ให้ X เป็นเฟนซ์จำกัด แล้ว $CP(X)$ เป็นกึ่งกรุปปรกติ ก็ต่อเมื่อ $|X| \leq 3$

รายการอ้างอิง

HIGGINS, P. M., MITCHELL, D., & RUSKUC, N. (2003). Generating the full transformation semigroup using order-preserving mapping. *Glasgow Math. J, no.*45.2003., p. 557-566.

PEI, H. S. (2005). Regularity and Green's ralations for semigroups of transformations that preserve an equivalence. . *Commun. Algabra* 33 2005., p. 109-118.

TANYAWONG, R., SRITHUS, R., & CHINRAM, R. (2016). Regular subsemigroups of the semigroups of transformations preserving a fence. . *Asian-Europian J. of Math.* 9. 2016.

ZHAO, P., & YANG, M. (2012). Regularity and Green's relations on semigroups of transformation preserving order and compression. *Bull. Korean Math. Soc.* 45. 2012., p. 1015–1025.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	จิรภา นันทรัตน์กุล
วัน เดือน ปี เกิด	10 มิถุนายน 2531
สถานที่เกิด	ราชบุรี
วุฒิการศึกษา	ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ จาก มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตบางเขน
ที่อยู่ปัจจุบัน	119/4 ม.4 ต.บ้านเลือก อ.โพธาราม จ.ราชบุรี 70120