ความเป็นปรกติของกึ่งกรุปการแปลงที่ขึ้นอยู่กับเฟนซ์และคราวน์

โดย

นางสาวมณฑาทิพย์ คงประเสริฐ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2561

ความเป็นปรกติของกึ่งกรุปการแปลงที่ขึ้นอยู่กับเฟนซ์และคราวน์

โดย

นางสาวมณฑาทิพย์ คงประเสริฐ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2561

REGULARITY OF SEMIGROUPS OF TRANSFORMATIONS CORRESPONDING TO A FENCE AND A CROWN

By

MISS Montatip KONGPRASERT

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for Master of Science (MATHEMATICS STUDY)

Department of MATHEMATICS

Graduate School, Silpakorn University

Academic Year 2018

หัวข้อ	ความเป็นปรกติของกึ่งกรุปการแปลงที่ขึ้นอยู่กับเฟนซ์และคราวน์
โดย	มณฑาทิพย์ คงประเสริฐ
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รัตนา ศรีทัศน์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

……... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร.ปานใจ ธารทัศนวงศ์)

พิจารณาเห็นชอบโดย

……... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. จิตติศักดิ์ รักบุตร)

……... อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. รัตนา ศรีทัศน์)

……... ผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วรินทร์ ศรีปัญญา)

57316326 : คณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก ระดับปริญญามหาบัณฑิต
คำสำคัญ : เฟนซ์, คราวน์, ฟังก์ชันยืนยงอันดับ, กึ่งกรุป, กึ่งกรุปปรกติ, กึ่งกรุปปรกติบริบูรณ์

นางสาว มณฑาทิพย์ คงประเสริฐ : ความเป็นปรกติของกึ่งกรุปการแปลงที่ขึ้นอยู่กับเฟนซ์และคราวน์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รัตนา ศรีทัศน์

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เราสนใจศึกษาความเป็นปรกติของกึ่งกรุปย่อย

$$EOP_X = \{\alpha : X \to X \mid \forall x, y \in X, (x, y) \in E \cap \leq \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E \cap \leq\}$$

ของ T_X เมื่อ X เป็นเฟนซ์และคราวน์ ตามลำดับ และ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X เราสามารถให้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการเท่ากันของ EOP_X และ O_X รวมถึง EOP_X และ T_X ตามลำดับ นอกจากนี้ ยังแสดงการจำแนกความเป็นปรกติของกึ่งกรุป EOP_X เมื่อ X เป็นเฟนซ์ สุดท้ายจะให้เงื่อนไขเพียงพอในการเป็นสมาชิกปรกติของ EOP_X เมื่อ X เป็นคราวน์

57316326 : Major (MATHEMATICS STUDY)
KEY WORD : FENCES, CROWN, ORDER- PRESERVING, SEMIGROUP, REGULAR, COREGULAR

MISS MONTATIP KONGPRASERT : REGULARITY OF SEMIGROUPS OF TRANSFORMATIONS CORRESPONDING TO A FENCE AND A CROWN. THESIS ADVISOR : ASSISTANT PROFESSOR RATANA SRITHUS

In this thesis, we consider the semigroup

$$EOP_X = \{\alpha : X \to X \mid \forall x, y \in X, (x, y) \in E \cap \leq \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E \cap \leq\}$$

where X is a fence and a crown, respectively and E is an arbitrary equivalence relation on X. We give sufficient and necessary conditions for E having $EOP_X = T_X$ and $EOP_X = O_X$, respectively. We characterize a fence X having EOP_X as a regular semigroup. Finally, sufficient conditions of elements in EOP_X where X is a crown to be regular are given.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี เพราะความกรุณาจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รัตนา ศรีทัศน์ ที่ให้คำปรึกษา คำแนะนำ ทำให้โลกทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของผู้วิจัยกว้างขวางขึ้น ช่วยเติมเต็มในจุดบกพร่องต่าง ๆ และแก้ไขในส่วนที่บกพร่อง อย่างเอาใจใส่ทุกขั้นตอนจนทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิตติศักดิ์ รักบุตร และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วรินทร์ ศรีปัญญา ประธานกรรมการ และกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ที่กรุณาให้คำแนะนำตรวจทานแก้ไขวิทยานิพนธ์

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากรทุกท่านที่ได้ประสิทธิประสาทวิชา พร้อมทั้งหยิบยื่นโอกาสทางการศึกษา และเป็นกำลังใจให้จนทำให้ลูกศิษย์ได้ประสบความสำเร็จ

สุดท้ายขอกราบขอบพระคุณ คุณแม่ คุณพ่อและครอบครัวที่มอบความรัก การดูแล และให้กำลังใจตลอดจนการสนับสนุนช่วยเหลือตลอดมาจนกระทั่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จเสร็จสิ้นลงด้วยดี

มณฑาทิพย์ คงประเสริฐ

วิทยานิพนธ์นี้

ได้รับทุนการศึกษาจากโครงการส่งเสริมการผลิตครูที่มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์

และคณิตศาสตร์ (สควค.)

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กระทรวงศึกษาธิการ

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1
บทนำ

ให้ X เป็นเซต เราทราบแล้วเซต T_X ของการแปลงบน X เป็นกึ่งกรุปภายใต้การดำเนินการประกอบ สมบัติทางพีชคณิตของกึ่งกรุป T_X และกึ่งกรุปย่อยของกึ่งกรุปนี้ ถูกศึกษาอย่างกว้างขวางโดยนักคณิตศาสตร์หลายท่านด้วยกัน

ในปี ค.ศ. 2005 ไปย์ (Pei) (H. S. PEI, 2005) แนะนำกึ่งกรุปย่อยของ T_X ที่ขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์สมมูล E บน X ซึ่งถูกนิยามดังนี้

$$T_E(X) = \{\alpha \in T_X \mid \forall (a,b) \in E, (a\alpha, b\alpha) \in E\}$$

พร้อมทั้งศึกษาสมบัติความเป็นปรกติของกึ่งกรุปนี้

ต่อไปพิจารณาเซต X เป็นเซตฐาน (base set) ของเซตอันดับเชิงเส้น (linearly ordered set) $(X;\leq)$ ซึ่งคือเซตอันดับที่สอดคล้องสมบัติ “$x \leq y$ หรือ $y \leq x$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$” ไปย์ และ ซู (Zou) (H. S. PEI, ZOU, D.Y., 2005) ได้แนะนำกึ่งกรุปย่อยของ $T_E(X)$ ซึ่งสัมพันธ์กับอันดับเชิงเส้น $\leq$ ดังนี้

$$O_E(X) = \{\alpha \in T_E(X) \mid \alpha \text{ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับบน } (X;\leq)\}$$

เช่นเดียวกับกรณีของ $T_E(X)$ เขาทั้งสองยังคงศึกษาสมบัติความเป็นปรกติของกึ่งกรุป $O_E(X)$

ใน ปี ค.ศ. 2010 มา (Ma) ยู (You) เลา (Luo) หยาง (Yan) และ หวาง (Wang) ได้แนะนำกึ่งกรุปย่อยของ T_X ในเอกสารอ้างอิง (MA, 2010) ซึ่งถูกสร้างโดยใช้แนวความคิดของกึ่งกรุป $T_E(X)$ และ $O_E(X)$ เมื่อ X เป็นเซตอันดับเชิงเส้น ดังนี้

$$EOP_X = \{\alpha \in T_X \mid \forall (x,y) \in E \cap \leq, (x\alpha, y\alpha) \in E \cap \leq\}$$

พร้อมทั้งศึกษาสมบัติต่าง ๆ รวมทั้งความเป็นปรกติของกึ่งกรุปนี้

ด้วยงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแปลงส่วนใหญ่จะศึกษาบนเซตอันดับเชิงเส้น ในขณะที่ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเซตอันดับอื่น ๆ ยังมีเพียงจำนวนน้อย ดังนั้นการศึกษากึ่งกรุปของการแปลงบนเซตอันดับที่ไม่ใช่เซตอันดับเชิงเส้นจึงเป็นหัวข้อที่น่าสนใจ เนื่องจาก เฟนซ์ (fence) และคราวน์ (crown) เป็นเซตอันดับที่ถูกศึกษามาอย่างยาวนาน เราจึงสนใจศึกษากึ่งกรุปย่อยของ T_X ซึ่งสร้างในทำนองเดียวกับ EOP_X แต่พิจารณา X เป็นเฟนซ์และคราวน์ ตามลำดับ

ต่อไป จะให้บทนิยามของเซตอันดับที่มีชื่อเรียกว่า เฟนซ์ และคราวน์ ตามลำดับ

เฟนซ์ X เป็นเซตอันดับซึ่งรูปแบบของอันดับเป็นเส้นทางสลับขึ้นลง โดยอันดับ $\leq$ ของ X สอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 \leq a_2 \geq a_3, a_3 \leq a_4 \geq a_5, \ldots \leq (\geq) a_n \quad \text{หรือ}$$

$$a_1 \geq a_2 \leq a_3, a_3 \geq a_4 \leq a_5, \ldots \leq (\geq) a_n$$

เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง และไม่มีความสัมพันธ์นอกจากนี้ โดยที่ $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$

คราวน์ X เป็นเซตอันดับ โดยอันดับ $\leq$ ของ X สอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1 \leq a_2 \geq a_3 \leq ... \geq a_{2n-1} \leq a_{2n} \geq a_1$$

เมื่อ $n \geq 2$ และไม่มีความสัมพันธ์นอกจากนี้ โดยที่ $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เราสนใจศึกษาความเป็นปรกติของ EOP_X เมื่อ X เป็นเฟนซ์และคราวน์ตามลำดับ โดยเริ่มต้นศึกษาจากการแสดงว่า EOP_X เป็นกึ่งกรุปย่อยของ T_X ต่อมาศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง EOP_X และกึ่งกรุปย่อยอื่น ๆ ของ T_X สุดท้ายศึกษาความปรกติของกึ่งกรุป EOP_X โดยแบ่งการศึกษาเป็นดังนี้

ในบทที่ 2 เรารวบรวมบทนิยามและความรู้พื้นฐานที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ในบทที่ 3 เราศึกษาความสัมพันธ์ของ $O_E(X)$ EOP_X และ $T_E(X)$ ตามลำดับ พร้อมทั้งให้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการเท่ากันของ EOP_X และ O_X รวมถึง EOP_X และ T_X ตามลำดับ นอกจากนี้เรายังแสดงการจำแนกความเป็นปรกติของกึ่งกรุป EOP_X เมื่อ X เป็นเฟนซ์ สุดท้ายจะให้เงื่อนไขเพียงพอในการเป็นสมาชิกปรกติของ EOP_X เมื่อ X เป็นคราวน์

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงบทนิยามและความรู้พื้นฐานซึ่งใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

2.1 บทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

บทนิยาม 2.1.1 ให้ X และ Y เป็นเซต จะเรียก α ว่า **ความสัมพันธ์** (relation) จาก X ไปยัง Y ถ้า $\alpha \subseteq X \times Y$ และเรียก α ว่า**ความสัมพันธ์บน** X ถ้า $\alpha \subseteq X \times X$

สำหรับแต่ละความสัมพันธ์ $\alpha \subseteq X \times Y$ กำหนดให้ **โดเมน** (domain) ของ α คือเซตของสมาชิกตัวที่หนึ่งของคู่อันดับทั้งหมดใน α ซึ่งเขียนแทนด้วย $dom\,\alpha$ และ**เรนจ์** (range) ของ α คือเซตของสมาชิกตัวที่สองของคู่อันดับทั้งหมดใน α ซึ่งเขียนแทนด้วย $ran\ \alpha$ นั่นคือ

$$dom\ \alpha = \{a \in X \mid \exists b \in Y, (a,b) \in \alpha\} \text{ และ } ran\ \alpha = \{b \in Y \mid \exists a \in X, (a,b) \in \alpha\}$$

ตามลำดับ

บทนิยาม 2.1.2 ให้ X เป็นเซต และ α, β เป็นความสัมพันธ์บน X **ความสัมพันธ์ผลประกอบ** (composition relations) ของ α และ β ซึ่งเขียนแทนด้วย $\alpha \circ \beta$ นิยามดังนี้

$$(a,b) \in \alpha \circ \beta \text{ ก็ต่อเมื่อ มี } x \in X \text{ โดยที่ } (a,x) \in \alpha \text{ และ } (x,b) \in \beta$$

นั่นคือ $\alpha \circ \beta = \{(a,b) \mid \exists x \in X, (a,x) \in \alpha \text{ และ } (x,b) \in \beta\}$

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เราแทน $\alpha \circ \beta$ ด้วย $\alpha\beta$

บทนิยาม 2.1.3 ให้ R เป็นความสัมพันธ์บน X เราจะกล่าวว่า R **เป็นความสัมพันธ์สมมูล** (equivalence relations) บน X ถ้า R สอดคล้องสมบัติ 3 ข้อต่อไปนี้

(i) **สมบัติสะท้อน** (reflexivity) นั่นคือ $(x,x) \in R$ สำหรับทุก ๆ $x \in X$

(ii) **สมบัติสมมาตร** (symmetry) นั่นคือ สำหรับแต่ละ $x, y \in X$ ถ้า $(x,y) \in R$ แล้ว $(y,x) \in R$

(iii) **สมบัติถ่ายทอด** (transitivity) นั่นคือ สำหรับแต่ละ $x, y, z \in X$ ถ้า $(x, y) \in R$ และ $(y, z) \in R$ แล้ว $(x, z) \in R$

เป็นที่ทราบแล้วว่า $\{(x,x) \mid x \in X\}$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน X เราแทนความสัมพันธ์นี้ด้วยสัญลักษณ์ Δ_X

บทนิยาม 2.1.4 ให้ X เป็นเซต และ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน X และ $a \in X$ **ชั้นสมมูล** (equivalence class) ของ a ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $[a]_E$ คือ เซตของสมาชิกทั้งหมดใน X ซึ่งสัมพันธ์กับ a นั่นคือ $[a]_E = \{x \in X \mid (x, a) \in E\}$

บทนิยาม 2.1.5 ให้ $X \neq \varnothing$ เป็นและ I เป็นดัชนี และให้ $P = \{X_i \mid i \in I\}$ เป็นแฟมิลีของเซตย่อย X ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะกล่าวว่า P เป็น**ผลแบ่งกั้น** (partition) ของ X ถ้า

(i) $X = \bigcup_{i \in I} X_i$

(ii) $X_i \cap X_j = \varnothing$ หรือ $X_i = X_j$ สำหรับทุก ๆ $i, j \in I$

ทฤษฎีบท 2.1.6 ให้ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X แล้ว $X/_E = \{[a]_E \mid a \in X\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ X

บทนิยาม 2.1.7 ให้ X และ Y เป็นเซต เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชัน** (function) จาก X ไปยัง Y ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $f : X \to Y$ ถ้า f สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) f เป็นความสัมพันธ์จาก X ไปยัง Y นั่นคือ $f \subseteq X \times Y$

(ii) สำหรับแต่ละ $x \in X$ และ $y_1, y_2 \in Y$ ถ้า $(x, y_1), (x, y_2) \in f$ แล้ว $y_1 = y_2$

ถ้า $X = Y$ เราเรียก f ว่า**การแปลง** (transformation) บน X

จากบทนิยาม 2.1.7 ข้อ (ii) ทำให้เราสามารถเขียนแทน y ด้วย $f(x)$ เมื่อ $(x, y) \in f$

2.2 บทนิยามของเซตอันดับและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงบทนิยามพื้นฐานของเซตอันดับและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม 2.2.1 ให้ X เป็นเซตและ $\leq \subseteq X \times X$ เป็นความสัมพันธ์ทวิภาคบน X เรากล่าวว่า $\leq$ เป็น**อันดับ** (order) บน X ถ้า $\leq$ สอดคล้องสมบัติ 3 ข้อต่อไปนี้

(i) **สมบัติสะท้อน** (reflexivity) นั่นคือ $x \leq x$ สำหรับทุก ๆ $x \in X$

(ii) **สมบัติปฏิสมมาตร** (anti-symmetry) นั่นคือ สำหรับแต่ละ $x, y \in X$ ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq x$ แล้ว $x = y$

(iii) **สมบัติถ่ายทอด** (transitivity) นั่นคือ สำหรับแต่ละ $x, y, z \in X$ ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq z$ แล้ว $x \leq z$

เราเรียกโครงสร้างที่ประกอบไปด้วยเซต X และอันดับ $\leq$ ว่า**เซตอันดับ** (ordered set) และแทนด้วยสัญลักษณ์ $(X;\leq)$ ในบางกรณีอาจแทนเซตอันดับ $(X;\leq)$ ด้วย X

บทนิยาม 2.2.2 ให้ $X = (X;\leq)$ และ $Y = (Y;\leq)$ เป็นเซตอันดับ และ $f : X \to Y$ เป็นฟังก์ชัน เราเรียก f ว่าเป็น**ฟังก์ชันยืนยงอันดับ** (order-preserving function) ถ้า $f(x) \leq f(y)$ ใน Y เมื่อไรก็ตามที่ $x \leq y$ ใน X

ถ้า $X = Y$ เราเรียก f ว่า**การแปลงแบบยืนยงอันดับ** (order-preserving transformation) ของ $(X;\leq)$

บทนิยาม 2.2.3 ให้ $(X;\leq)$ เป็นเซตอันดับและ $x, y \in X$ เรากล่าวว่า x และ y **สามารถเปรียบเทียบกันได้** (comparable) ถ้า $x \leq y$ หรือ $y \leq x$

ถ้า $x \leq y$ หรือ $y \leq x$ เป็นเท็จทั้งคู่ เรากล่าวว่า x และ y **เปรียบเทียบกันไม่ได้** (non-comparable) โดยจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \parallel y$

บทนิยาม 2.2.4 ให้ $(X;\leq)$ เป็นเซตอันดับ เราเรียก X ว่า**เซตอันดับเชิงเส้น** (linearly ordered set) ถ้า $x \leq y$ หรือ $y \leq x$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$

บทนิยาม 2.2.5 ให้ R เป็นความสัมพันธ์บนเซต X และ $f : X \to X$ เรากล่าวว่า f **ยืนยง** (preserve) R ถ้า $(f(x), f(y)) \in R$ สำหรับทุก ๆ $(x, y) \in R$

ทฤษฎีบท 2.2.6 ให้ $X=(X;\leq), Y=(Y;\leq)$ และ $Z=(Z;\leq)$ เป็นเซตอันดับ และ $\alpha: X\to Y$ และ $\beta: Y\to Z$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ แล้ว $\alpha\beta: X\to Z$ เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับจากเซตอันดับ X ไปยัง Z

ต่อไปจะให้บทนิยามเซตอันดับที่เรียกว่าเฟนซ์และคราวน์ตามลำดับ

บทนิยาม 2.2.7 ให้ $X=(X;\leq)$ เป็นเซตอันดับ กล่าวว่า X เป็น**เฟนซ์** (fence) ถ้าอันดับ $\leq$ มีรูปแบบความสัมพันธ์สลับขึ้นลงเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง นั่นคือ

$$a_1\leq a_2\geq a_3, a_3\leq a_4\geq a_5,\ldots\leq(\geq)a_n \quad \text{หรือ}$$

$$a_1\geq a_2\leq a_3, a_3\geq a_4\leq a_5,\ldots\leq(\geq)a_n$$

เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง และไม่มีความสัมพันธ์นอกจากนี้ โดยที่ $X=\{a_1,a_2,...,a_n\}$

บทนิยาม 2.2.8 ให้ $X=(X;\leq)$ เป็นเซตอันดับ กล่าวว่า X เป็น**คราวน์** (crown) ถ้าอันดับ $\leq$ สอดคล้องเงื่อนไข

$$a_1\leq a_2\geq a_3\leq\ldots\geq a_{2n-1}\leq a_{2n}\geq a_1$$

เมื่อ $n\geq 2$ และไม่มีความสัมพันธ์นอกจากนี้ โดยที่ $X=\{a_1,a_2,...,a_n\}$

2.3 บทนิยามของกึ่งกรุปและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานต่าง ๆ ของกึ่งกรุป

บทนิยาม 2.3.1 ให้ X เป็นเซต เราจะเรียก $*$ ว่า**การดำเนินการทวิภาค** (binary operation) บน X ถ้า $*$ เป็นฟังก์ชันจาก $X\times X$ ไปยัง X

นอกจากนี้เราใช้สัญลักษณ์แทน $*(x,y)$ ด้วย $x*y$

บทนิยาม 2.3.2 ให้ X เป็นเซต และ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X

(1) $*$ มี**สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม** (associative law) ถ้า $(x*y)*z=x*(y*z)$ สำหรับทุก ๆ $x,y,z\in X$

(2) $*$ มี**สมาชิกเอกลักษณ์** (identity element) ในเซต X ถ้ามี $e \in X$ ซึ่ง $e*x = x*e = x$ สำหรับทุก ๆ $x \in X$ และเรียก e ว่าสมาชิกเอกลักษณ์

บทนิยาม 2.3.3 กึ่งกรุป (semigroup) $S = (S;*)$ คือโครงสร้างที่ประกอบด้วยเซต S และการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต S ที่สอดคล้องสมบัติการเปลี่ยนหมู่ นั่นคือ $(a*b)*c = a*(b*c)$ สำหรับทุก ๆ $a,b,c \in S$

ต่อไปจะให้บทนิยามของสมาชิกปรกติของกึ่งกรุป

บทนิยาม 2.3.4 ให้ $(S;*)$ เป็นกึ่งกรุป กล่าวว่าสมาชิก a ในเซต S เป็น**สมาชิกปรกติ** (regular element) ถ้ามีสมาชิก $x \in S$ ที่ทำให้ $a = a*x*a$

เราจะเรียกกึ่งกรุป $(S;*)$ ว่า**กึ่งกรุปปรกติ** (regular semigroup) ถ้าทุก ๆ สมาชิกของ S เป็นสมาชิกปรกติ

และเรียกสมาชิก a ในกึ่งกรุป S ว่า**สมาชิกปรกติบริบูรณ์** (coregular element) ถ้ามีสมาชิก $x \in S$ ที่ทำให้ $a*x*a = a = x*a*x$

เราจะเรียกกึ่งกรุป $(S;*)$ ว่า**กึ่งกรุปปรกติบริบูรณ์** (coregular semigroup) ถ้าทุก ๆ สมาชิกของ S เป็นสมาชิกปรกติบริบูรณ์

ทฤษฎีบท 2.3.5 ให้ $(S;*)$ เป็นกึ่งกรุป และ $a \in S$ จะได้ว่า a เป็นสมาชิกปรกติบริบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ $a*a*a = a$

สำหรับแต่ละเซต X กำหนดให้ T_X แทนกึ่งกรุปของการแปลงทั้งหมดบน X ภายใต้การดำเนินการประกอบของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 2.3.6 ให้ X เป็นเซต แล้ว T_X เป็นกึ่งกรุปปรกติ

สำหรับแต่ละเซตอันดับ X เราให้ O_X แทนกึ่งกรุปของฟังก์ชันยืนยงอันดับจาก X ไปยัง X ภายใต้การดำเนินการประกอบ

ทฤษฎีบท 2.3.7 ให้ X เป็นเซตอันดับ แล้ว O_X เป็นกึ่งกรุปย่อยของ T_X

โดยทั่วไปแล้ว O_X อาจไม่เป็นกึ่งกรุปปรกติ และกึ่งกรุปปรกติบริบูรณ์

ในปี ค.ศ. 2015 จินดาหนา (Jendana) และศรีทัศน์ (Srithus) (JENDANA, 2015) ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3.8 ให้ $(X;\leq)$ เป็นเฟนซ์จำกัด แล้ว O_X เป็นกึ่งกรุปปรกติบริบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ $|X|\leq 2$

ต่อมาในปี ค.ศ. 2016 ธัญญวงค์และคณะฯ (Tanyawong *et al*) (TANYAWONG, 2016) ได้ศึกษาสมบัติของกึ่งกรุปปรกติของการแปลงบนเฟนซ์ ซึ่งเขาได้พิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3.9 ให้ $(X;\leq)$ เป็นเฟนซ์ แล้ว O_X เป็นกึ่งกรุปปรกติ ก็ต่อเมื่อ $|X|\leq 4$

บทที่ 3
ความเป็นปรกติของกึ่งกรุป EOP_X

เป็นที่ทราบแล้วว่ากึ่งกรุปของการแปลงถูกนำมาศึกษากันอย่างกว้างขวาง ซึ่งกึ่งกรุปของการแปลงของเซตอันดับเป็นหัวข้อหนึ่งที่นักคณิตศาสตร์สนใจศึกษากันมาอย่างยาวนาน โดยเฉพาะอย่างยิ่งความเป็นปรกติของกึ่งกรุปของการแปลง ด้วยงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแปลงส่วนใหญ่ จะศึกษาบนเซตอันดับเชิงเส้น ในขณะที่ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเซตอันดับอื่น ๆ ยังมีเพียงจำนวนน้อย ดังนั้นการศึกษากึ่งกรุปของการแปลงบนเซตอันดับที่ไม่ใช่เซตอันดับเชิงเส้นจึงเป็นหัวข้อที่น่าสนใจ ในวิทยานิพนธ์นี้ เราสนใจศึกษากึ่งกรุปของการแปลงบนเซตอันดับที่มีชื่อเรียกว่า เฟนซ์ และคราวน์ ตามลำดับ

ใน ปี ค.ศ. 2010 มา ยู เลา หยาง และหวาง ได้แนะนำกึ่งกรุปย่อยของ T_X ซึ่งกึ่งกรุปดังกล่าวถูกสร้างโดยใช้แนวความคิดของกึ่งกรุป $T_E(X)$ และ $O_E(X)$ ดังที่กล่าวมาแล้วในบทนำดังนี้

$$EOP_X = \{\alpha \in T_X \mid \forall (x,y) \in E \cap \leq, (x\alpha, y\alpha) \in E \cap \leq\}$$

เมื่อ X เป็นเซตอันดับเชิงเส้น พร้อมทั้งศึกษาสมบัติต่าง ๆ รวมทั้งความเป็นปรกติของกึ่งกรุปนี้

ในบทนี้เราสนใจศึกษาสมบัติทางพีชคณิตของ

$$EOP_X = \{\alpha \in T_X \mid \forall (x,y) \in E \cap \leq, (x\alpha, y\alpha) \in E \cap \leq\}$$

เมื่อ X เป็นเฟนซ์ และคราวน์ ตามลำดับ โดยเฉพาะอย่างยิ่งสมบัติความเป็นปรกติของกึ่งกรุป

3.1 สมบัติบางประการของ EOP_X เมื่อ X เป็นเฟนซ์ และคราวน์

เริ่มต้นจะตรวจสอบว่า EOP_X เป็นกึ่งกรุปย่อยของ T_X หรือไม่ เมื่อ X เป็นเฟนซ์ และคราวน์ ตามลำดับ ในทฤษฎีบทต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า EOP_X เป็นกึ่งกรุปย่อยของ T_X เสมอ เมื่อ X เป็นเซตอันดับใด ๆ

ทฤษฎีบท 3.1.1 ให้ $(X;\leq)$ เป็นเซตอันดับ และ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน X แล้ว $(EOP_X;\circ)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $(T_X;\circ)$ เมื่อ $\circ$ คือการดำเนินการประกอบฟังก์ชัน

บทพิสูจน์ ให้ $\alpha,\beta \in EOP_X$ และ$(x,y)\in E\cap\leq$ จาก α ยืนยง $E\cap\leq$ จะได้ว่า $(x\alpha, y\alpha)\in E\cap\leq$ เพราะว่า β ยืนยง $E\cap\leq$ เช่นเดียวกับ α จึงได้ว่า $(x\beta\circ\alpha, y\beta\circ\alpha)=(x\beta(\alpha), y\beta(\alpha))\in E\cap\leq$ ดังนั้น $\beta\circ\alpha\in EOP_X$ ทำให้ได้ว่า EOP_X มีสมบัติปิดภายใต้ $\circ$ เพราะฉะนั้น $(EOP_X;\circ)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $(T_X;\circ)$ □

ใน ปี ค.ศ. 2010 มา ยู เลา หยาง และ หวาง (MA, 2010) ได้ศึกษาสมบัติของ EOP_X เมื่อ X เป็นเซตอันดับเชิงเส้น เริ่มต้นได้แสดงความสัมพันธ์ของกึ่งกรุปทั้ง 3 ที่กล่าวถึงข้างต้น โดยพิสูจน์ว่า $O_E(X)\subseteq EOP_X\subseteq T_E(X)$ เมื่อ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X ดังนั้นเราจึงสนใจว่า เมื่อ X เป็นเฟนซ์ และคราวน์ ความสัมพันธ์ของกึ่งกรุปทั้ง 3 จะยังคงเป็นเซตย่อยกันหรือไม่

ทฤษฎีบทต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า $O_E(X)\subseteq EOP_X$ เสมอ เมื่อ X เป็นเซตอันดับใด ๆ แต่ EOP_X อาจไม่เป็นเซตย่อยของ $T_E(X)$ เมื่อ X เป็นเฟนซ์ และคราวน์ ตามลำดับ

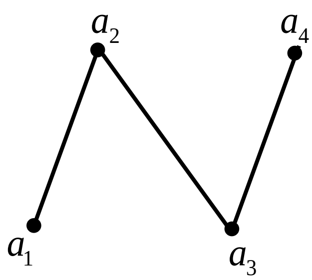
ทฤษฎีบท 3.1.2 ให้ $(X;\leq)$ เป็นเซตอันดับ และ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X แล้ว $O_E(X)\subseteq EOP_X$

บทพิสูจน์ ให้ $\alpha\in O_E(X)$ จะแสดงว่า $\alpha\in EOP_X$ นั่นคือจะแสดงว่า $(x\alpha, y\alpha)\in E\cap\leq$ สำหรับทุก ๆ $(x,y)\in E\cap\leq$

ให้$(x,y)\in E$ และ $x\leq y$ จาก $\alpha\in O_E(X)$ จะได้ว่า α ยืนยง E และ $\leq$ ทำให้ได้ $(x\alpha, y\alpha)\in E$ และ $x\alpha\leq y\alpha$ ดังนั้น$(x\alpha, y\alpha)\in E\cap\leq$ ทำให้ได้ว่า $\alpha\in EOP_X$ เพราะฉะนั้น $O_E(X)\subseteq EOP_X$ □

ตัวอย่างต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า EOP_X อาจไม่เป็นเซตย่อยของ $T_E(X)$ เมื่อ X เป็นเฟนซ์ และคราวน์ ตามลำดับ

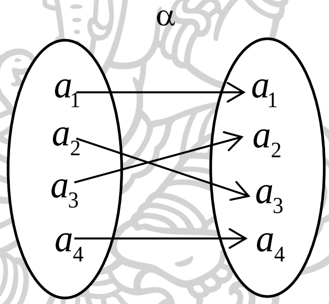
ตัวอย่าง 3.1.3 ให้ $(X;\leq)$ เป็นเฟนซ์ที่มี 4 สมาชิก แสดงดังรูปข้างล่าง



พิจารณาความสัมพันธ์สมมูล $E=\{(a_1,a_1),(a_2,a_2),(a_3,a_3),(a_4,a_4),(a_2,a_4),(a_4,a_2)\}$ จะได้ว่า $E\cap\leq=\Delta_X$

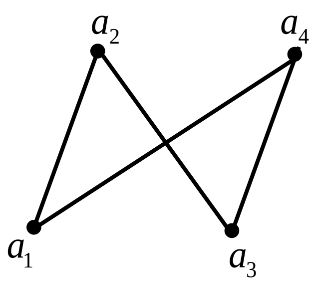
จะแสดงว่า $EOP_X\nsubseteq T_E(X)$

ให้ α เป็นฟังก์ชันจาก X ไปยัง X ที่นิยามดังแผนภาพข้างล่าง



เพราะว่า $E\cap\leq=\Delta_X$ จึงได้ว่า $\alpha\in EOP_X$ เสมอ จาก $(a_2,a_4)\in E$ แต่ $(a_2\alpha,a_4\alpha)=(a_3,a_4)\notin E$ ดังนั้น $\alpha\notin T_E(X)$ ทำให้ได้ว่า $EOP_X\nsubseteq T_E(X)$ ○

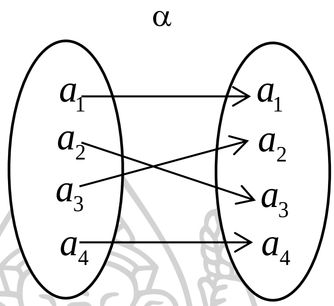
ตัวอย่าง 3.1.4 ให้ $(X;\leq)$ เป็นคราวน์ที่มี 4 สมาชิก แสดงดังรูปข้างล่าง



พิจารณาความสัมพันธ์สมมูล $E = \{(a_1,a_1),(a_2,a_2),(a_3,a_3),(a_4,a_4),(a_2,a_4),(a_4,a_2)\}$ จะได้ว่า $E \cap \leq = \Delta_X$

จะแสดงว่า $EOP_X \not\subseteq T_E(X)$

ให้ α เป็นฟังก์ชันจาก X ไปยัง X ที่นิยามดังแผนภาพข้างล่าง

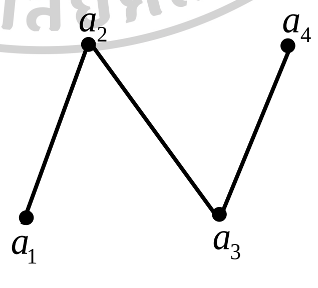


เพราะว่า $E \cap \leq = \Delta_X$ จึงได้ว่า $\alpha \in EOP_X$ เสมอ จาก $(a_2, a_4) \in E$ แต่ $(a_2\alpha, a_4\alpha) = (a_3, a_4) \notin E$ ดังนั้น $\alpha \notin T_E(X)$ ทำให้ได้ว่า $EOP_X \not\subseteq T_E(X)$ ○

เนื่องจากเซต EOP_X ถูกนิยามโดยใช้อันดับของเซตอันดับ X เราจึงสนใจศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง EOP_X และ O_X

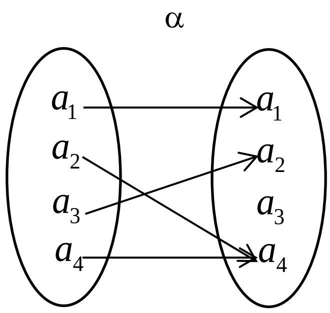
ตัวอย่างต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า EOP_X และ O_X เมื่อ X เป็นเฟนซ์ อาจไม่มีความสัมพันธ์กันในเชิงเซตย่อย

ตัวอย่าง 3.1.5 ให้ $(X;\leq)$ เป็นเฟนซ์ที่มี 4 สมาชิก แสดงดังรูปข้างล่าง



พิจารณาความสัมพันธ์สมมูล $E = \{(a_1,a_1),(a_2,a_2),(a_3,a_3),(a_4,a_4),(a_2,a_4),(a_4,a_2)\}$ จะได้ว่า $E \cap \leq = \Delta_X$

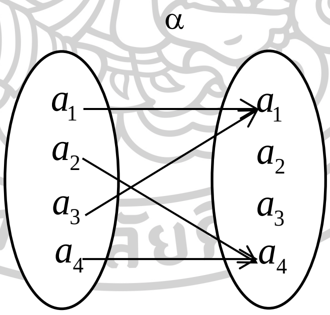
ให้ α เป็นฟังก์ชันจาก X ไปยัง X ที่นิยามดังแผนภาพข้างล่าง



เนื่องจาก $\Delta_X \subseteq E\cap\leq$ จะได้จากการนิยาม α ว่า
$\{(a_1\alpha, a_1\alpha), (a_2\alpha, a_2\alpha), (a_3\alpha, a_3\alpha), (a_4\alpha, a_4\alpha)\} = \{(a_1, a_1), (a_4, a_4), (a_2, a_2), (a_4, a_4)\} \subseteq E\cap\leq$
ทำให้ได้ว่า $\alpha \in EOP_X$ เพราะว่า $a_3\alpha = a_2$ และ $a_2\alpha = a_4$ จะได้ว่า $x\alpha \nleq y\alpha$ ทำให้ได้ว่า α ไม่ยืนยง $\leq$ ดังนั้น $\alpha \notin O_X$ ทำให้ได้ว่า $EOP_X \nsubseteq O_X$

ต่อไปพิจารณาความสัมพันธ์สมมูล $E = \{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_4)\}$ จะได้ว่า $E\cap\leq = \{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_4)\}$

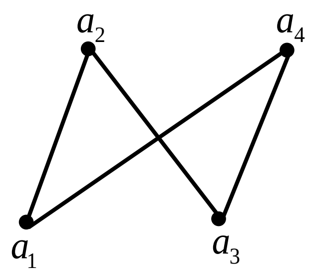
ให้ α เป็นฟังก์ชันจาก X ไปยัง X ที่นิยามดังแผนภาพข้างล่าง



จาก $a_3\alpha = a_1$ และ $a_2\alpha = a_4$ จะได้ว่า α ยืนยง $\leq$ ทำให้ได้ว่า $\alpha \in O_X$ แต่ $(a_3\alpha, a_2\alpha) = (a_1, a_4) \notin E\cap\leq$ ดังนั้น $\alpha \notin EOP_X$ ซึ่งทำให้ $O_X \nsubseteq EOP_X$ ○

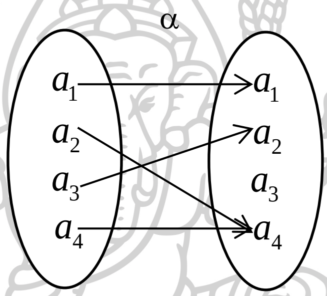
ตัวอย่างต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า EOP_X และ O_X เมื่อ X เป็นคราวน์อาจไม่มีความสัมพันธ์กันในเชิงเซตย่อย

ตัวอย่าง 3.1.6 ให้ $(X;\leq)$ เป็นคราวน์ที่มี 4 สมาชิก แสดงดังรูปข้างล่าง



พิจารณาความสัมพันธ์สมมูล $E = \{(a_1,a_1),(a_2,a_2),(a_3,a_3),(a_4,a_4),(a_2,a_4),(a_4,a_2)\}$ จะได้ว่า $E \cap \leq = \Delta_X$

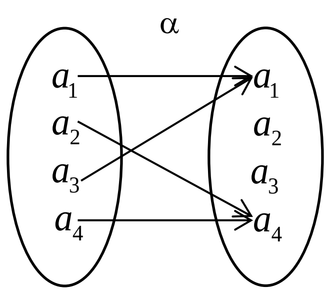
ให้ α เป็นฟังก์ชันจาก X ไปยัง X ที่นิยามดังแผนภาพข้างล่าง



เนื่องจาก $\Delta_X \subseteq E \cap \leq$ จะได้จากการนิยาม α ว่า
$\{(a_1\alpha,a_1\alpha),(a_2\alpha,a_2\alpha),(a_3\alpha,a_3\alpha),(a_4\alpha,a_4\alpha)\} = \{(a_1,a_1),(a_4,a_4),(a_2,a_2),(a_4,a_4)\} \subseteq E \cap \leq$
ทำให้ได้ว่า $\alpha \in EOP_X$ เพราะว่า $a_3\alpha = a_2$ และ $a_2\alpha = a_4$ จะได้ว่า $x\alpha \nleq y\alpha$ ทำให้ได้ว่า α ไม่ยืนยง $\leq$ ดังนั้น $\alpha \notin O_X$ ทำให้ได้ว่า $EOP_X \nsubseteq O_X$

ต่อไปพิจารณาความสัมพันธ์สมมูล $E = \{(a_1,a_1),(a_2,a_2),(a_2,a_3),(a_3,a_2),(a_3,a_3),(a_4,a_4)\}$ จะได้ว่า $E \cap \leq = \{(a_1,a_1),(a_2,a_2),(a_3,a_2),(a_3,a_3),(a_4,a_4)\}$

ให้ α เป็นฟังก์ชันจาก X ไปยัง X ที่นิยามดังแผนภาพข้างล่าง



จาก $a_3\alpha = a_1$ และ $a_2\alpha = a_4$ จะได้ว่า α ยืนยง $\leq$ ทำให้ได้ว่า $\alpha \in O_X$ แต่ $(a_3\alpha, a_2\alpha) = (a_1, a_4) \notin E \cap \leq$ ดังนั้น $\alpha \notin EOP_X$ ซึ่งทำให้ $O_X \nsubseteq EOP_X$ ○

3.2 ความเป็นปรกติของกึ่งกรุป EOP_X เมื่อ X เป็นเฟนซ์

แม้ว่าในหัวข้อ 3.1 เราทราบแล้วว่าโดยทั่วไป EOP_X และ O_X เมื่อ X เป็นเฟนซ์ อาจไม่มีความสัมพันธ์ในเชิงการเป็นเซตย่อย แต่ในหัวข้อนี้ จะเริ่มต้นการศึกษาในการหาเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการเท่ากันของเซต EOP_X และ O_X ตามลำดับ ทั้งนี้เป็นเพราะว่า ในปี ค.ศ. 2015 จินดาหนา และศรีทัศน์ (JENDANA, 2015) ได้พิสูจน์ว่า สำหรับเฟนซ์จำกัด X กึ่งกรุป O_X เป็นกึ่งกรุปปรกติบริบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ $|X| \leq 2$ ต่อมาในปี ค.ศ. 2016 ธัญญวงค์และ คณะฯ (TANYAWONG, 2016) ได้ศึกษาสมบัติของกึ่งกรุปปรกติบริบูรณ์ของการแปลงบนเฟนซ์ ตัวอย่างเช่น เขาพิสูจน์ว่า O_X เป็นกึ่งกรุปปรกติ ก็ต่อเมื่อ $|X| \leq 4$ ซึ่งทำให้ได้ว่าเราจะสามารถจำแนกความเป็นปรกติบริบูรณ์และความเป็นปรกติของ EOP_X ได้ เมื่อ $EOP_X = O_X$

ทฤษฎีบท 3.2.1 ให้ $(X;\leq)$ เป็นเฟนซ์ และ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X แล้ว $E = X \times X$ ก็ต่อเมื่อ $EOP_X = O_X$

บทพิสูจน์ สมมติว่า $E = X \times X$ จะแสดงว่า $EOP_X = O_X$

ให้ $\alpha \in EOP_X$ จะแสดงว่า $\alpha \in O_X$ นั่นคือจะแสดงว่า $x\alpha \leq y\alpha$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ ซึ่ง $x \leq y$

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $x \leq y$ เพราะว่า $E = X \times X$ จึงได้ว่า $(x, y) \in X \times X = E$ ทำให้ได้ว่า $(x, y) \in E \cap \leq$ เนื่องจาก $\alpha \in EOP_X$ จึงได้ว่า $(x\alpha, y\alpha) \in E \cap \leq$ ทำให้ได้ว่า $x\alpha \leq y\alpha$ ดังนั้น $\alpha \in O_X$ เพราะฉะนั้น $EOP_X \subseteq O_X$

ต่อไปจะแสดงว่า $O_X \subseteq EOP_X$

ให้ $\alpha \in O_X$ จะแสดงว่า $\alpha \in EOP_X$ นั่นคือจะแสดงว่า $(x\alpha, y\alpha) \in E \cap \leq$ สำหรับทุก ๆ $(x, y) \in E \cap \leq$

ให้ $(x,y)\in E\cap\leq$ จะได้ว่า $(x,y)\in E$ และ $x\leq y$ เพราะว่า α เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ จึงได้ว่า $x\alpha\leq y\alpha$ เนื่องจาก $x\alpha, y\alpha\in X$ จึงได้ว่า $(x\alpha, y\alpha)\in X\times X=E$ ทำให้ได้ว่า $(x\alpha, y\alpha)\in E\cap\leq$ ดังนั้น $\alpha\in EOP_X$ จากการพิสูจน์ข้างต้น เราจึงสรุปได้ว่า $EOP_X=O_X$

ในทางกลับกันสมมติว่า $EOP_X=O_X$ จะแสดงว่า $E=X\times X$ โดยการพิสูจน์ข้อความแย้งสลับที่

สมมติว่า $E\neq X\times X$ จะได้ว่า $\left|X/E\right|\geq 2$ ทำให้ได้ว่ามี $A,B\in X/E$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่างและ $A\neq B$ เนื่องจาก X/E เป็นผลแบ่งกั้นของ X จึงได้ว่า $A\cap B=\varnothing$ จาก $A,B\neq\varnothing$ จะมี $a\in A$ และ $b\in B$ เพราะว่า $A\cap B=\varnothing$ จึงได้ว่า $a\neq b$

ให้ α เป็นฟังก์ชันบน X ที่นิยามโดย

$$x\alpha = \begin{cases} a, \text{ถ้า } x\in B \\ b, \text{ถ้า } x\in X\setminus B \end{cases}$$

จะแสดงว่า $\alpha\in EOP_X$

ให้ $(x,y)\in E\cap\leq$ จะได้ว่า $(x,y)\in E$ และ $x\leq y$ จาก $(x,y)\in E$ จะได้ว่า $[x]_E=[y]_E$

ถ้า $[x]_E=B$ แล้วจะได้ว่า $x\alpha=a=y\alpha$ ทำให้ได้ว่า $(x\alpha, y\alpha)\in E\cap\leq$

ถ้า $[x]_E\neq B$ แล้วจะได้ว่า $x\alpha=b=y\alpha$ ทำให้ได้ว่า $(x\alpha, y\alpha)\in E\cap\leq$

จากทั้ง 2 กรณีพิสูจน์ได้ว่า $\alpha\in EOP_X$

ต่อไปจะแสดงว่า $\alpha\notin O_X$ โดยพิจารณา a,b ออกเป็น 3 กรณี ดังนี้

ถ้า $a<b$ แล้วจาก $a\in A$ และ $b\in B$ จะได้ว่า $a\alpha=b>a=b\alpha$ ดังนั้น $\alpha\notin O_X$

ถ้า $a>b$ แล้วจาก $a\in A$ และ $b\in B$ จะได้ว่า $a\alpha=b<a=b\alpha$ ดังนั้น $\alpha\notin O_X$

ถ้า $a\parallel b$ แล้วจะได้ว่า $a\nleq b$ หรือ $a\ngeq b$ ดังนั้น $\alpha\notin O_X$

เพราะว่า $\alpha\in EOP_X$ แต่ $\alpha\notin O_X$ จึงได้ว่า $EOP_X\neq O_X$ ดังนั้น $E=X\times X$ □

บทแทรก 3.2.2 เป็นผลโดยตรงจาก ทฤษฎีบท 2.3.9 และ ทฤษฎีบท 3.2.1 ตามลำดับ

บทแทรก 3.2.2 ให้ $(X;\leq)$ เป็นเฟนซ์ และ $E = X \times X$ แล้ว EOP_X เป็นกึ่งกรุปปรกติ ก็ต่อเมื่อ $|X| \leq 4$

เป็นที่ทราบแล้วว่า กึ่งกรุป T_X เป็นกึ่งกรุปปรกติเสมอ และ EOP_X เป็นกึ่งกรุปย่อยของ T_X ทฤษฎีบทต่อไปเราจะให้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอในการเท่ากันของ EOP_X และ T_X ทั้งนี้เป็นเพราะว่า เมื่อทราบว่า $EOP_X = T_X$ จะได้ว่า EOP_X เป็นกึ่งกรุปปรกติ

ทฤษฎีบท 3.2.3 ให้ $(X;\leq)$ เป็นเฟนซ์ และ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X แล้ว $EOP_X = T_X$ ก็ต่อเมื่อ E สอดคล้องกับเงื่อนไข

(*) สำหรับแต่ละ $A \in X/E$ และแต่ละ $x, y \in A$ ถ้า $x \neq y$ แล้ว $x \parallel y$

บทพิสูจน์ สมมติว่า $EOP_X = T_X$ และให้ $x, y \in A \in X/E$ ซึ่ง $x \neq y$

ให้ α เป็นฟังก์ชันบน X ที่นิยามโดย

$$x\alpha = \begin{cases} x, & x = y \\ y, & x \neq y \end{cases}$$

จาก $EOP_X = T_X$ จะได้ว่า $\alpha \in EOP_X$ ทำให้ได้ว่า $(x\alpha, y\alpha) \in E \cap \leq$ สำหรับทุกๆ $(x, y) \in E \cap \leq$ ถ้า $x < y$ แล้วจาก $(x\alpha, y\alpha) \in E \cap \leq$ จะได้ว่า $y = x\alpha \leq y\alpha = x$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $x \parallel y$

ในทางกลับกันสมมติว่า E สอดคล้องกับเงื่อนไข (*) จากบทนิยามของเซต EOP_X เราทราบว่า $EOP_X \subseteq T_X$

ในการแสดงว่า $EOP_X = T_X$ จึงเหลือแต่เพียงแสดงว่า $T_X \subseteq EOP_X$

ให้ $\alpha \in T_X$ จะแสดงว่า $\alpha \in EOP_X$

ให้ $(x, y) \in E$ ซึ่ง $x \leq y$ จากเงื่อนไข (*) จะได้ว่า $x = y$ ดังนั้น $x\alpha = y\alpha$ จาก $(x, y) \in E \cap \leq$ จะได้ว่า $(x\alpha, y\alpha) \in E \cap \leq$ เราจึงพิสูจน์ได้ว่า $T_X \subseteq EOP_X$ ดังนั้น $EOP_X = T_X$ □

บทแทรก 3.2.4 ให้ $(X;\leq)$ เป็นเฟนซ์ และ E สอดคล้องกับเงื่อนไข (*) แล้ว EOP_X เป็นกึ่งกรุปปรกติเสมอ

ทฤษฎีบทสุดท้ายของหัวข้อนี้ จะแสดงการจำแนกความเป็นปรกติของกึ่งกรุป EOP_X เมื่อ X เป็นเฟนซ์

ทฤษฎีบท 3.2.5 ให้ $(X;\leq)$ เป็นเฟนซ์ และ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X แล้ว EOP_X เป็นกึ่งกรุปปรกติ ก็ต่อเมื่อ EOP_X สอดคล้องกับเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งต่อไปนี้

(i) $|X|\leq 4$ และ $E = X\times X$

(ii) E สอดคล้องกับเงื่อนไข (*)

บทพิสูจน์ ให้ EOP_X เป็นกึ่งกรุปปรกติ จะแสดงว่า EOP_X สอดคล้องกับเงื่อนไข (i) หรือ (ii) โดยการพิสูจน์แบบหาข้อขัดแย้ง

สมมติว่า EOP_X ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข (i) และ (ii)

เริ่มต้นจะแสดงว่า $E\neq X\times X$

สมมติว่า $E = X\times X$ เนื่องจาก EOP_X ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข (i)จึงได้ว่า $|X|>4$ และโดยทฤษฎีบท 3.2.1 จะได้ว่า $EOP_X = O_X$ จากสมมติฐานจะได้ว่า O_X เป็นกึ่งกรุปปรกติ โดยทฤษฎีบท 2.3.9 จะได้ว่า $|X|\leq 4$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $E\neq X\times X$ เนื่องจาก EOP_X ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข(ii) จะมี $A\in X/E$ และมี $a,b\in A$ ซึ่ง $a\neq b$ แต่ a และ b เปรียบเทียบกันได้ ทำให้ได้ว่า $(a,b)\in E$ และ $a\leq b$ หรือ $b\leq a$

โดยไม่เสียนัยความเป็นทั่วไป สมมติว่า $a\leq b$ จะได้ว่า $(a,b)\in E\cap\leq$

ให้ α เป็นฟังก์ชันบน X ที่นิยามโดย

$$x\alpha = \begin{cases} a, & \text{ถ้า } x\in A \\ b, & \text{ถ้า } x\in X\setminus A \end{cases}$$

จะแสดงว่า $\alpha\in EOP_X$

ให้ $(x,y)\in E\cap\leq$ พิจารณา X เป็น 2 กรณี ดังนี้

ถ้า $x\in A$ แล้ว $y\in A$ ดังนั้น $x\alpha = a = y\alpha$

ถ้า $x\notin A$ แล้ว $y\notin A$ ดังนั้น $x\alpha = b = y\alpha$ ทำให้ได้ว่า $(x\alpha, y\alpha)\in E$ และ $x\alpha\leq y\alpha$ เพราะฉะนั้น $\alpha\in EOP_X$

สมมติว่า α เป็นสมาชิกปรกติ จะมี $\beta \in EOP_X$ ซึ่ง $\alpha\beta\alpha = \alpha$ เพราะว่า $A \neq X$ จะมี $x \in X \setminus A$ จากบทนิยาม α จะได้ว่า $(b\beta)\alpha \in (x\alpha)\beta\alpha = x\alpha = b$ ทำให้ได้ว่า $b\beta \notin A$ และ $(a\beta)\alpha \in a\alpha\beta\alpha = a\alpha = a$ ดังนั้น $a\beta \in A$ เนื่องจาก $\beta \in EOP_X$ และ $(a,b) \in E \cap \leq$ จะได้ว่า $(a\beta, b\beta) \in E \cap \leq$ ทำให้ได้ว่า $(a\beta, b\beta) \in E$ จาก $a\beta \in A$ จะได้ว่า $b\beta \in A$ เกิดข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้น EOP_X สอดคล้องกับเงื่อนไข (i) และ (ii)

ในทางกลับกัน สมมติว่า EOP_X สอดคล้องกับเงื่อนไข (i) และ (ii) จะแสดงว่า EOP_X เป็นกึ่งกรุปปรกติ

ถ้า EOP_X สอดคล้อง (i) แล้วจะได้ว่า $|X| \leq 4$ และ $E = X \times X$ เพราะว่า $E = X \times X$ จึงได้ว่า $EOP_X = O_X$ เนื่องจาก $|X| \leq 4$ โดยทฤษฎีบท 2.3.9 จะได้ว่า $EOP_X = O_X$ เป็นกึ่งกรุปปรกติ

ถ้า EOP_X สอดคล้อง (ii) โดยทฤษฎีบท 3.2.3 จะได้ว่า $EOP_X = T_X$ ทำให้ได้ว่า EOP_X เป็นกึ่งกรุปปรกติ ทั้งนี้เป็นเพราะว่า T_X เป็นกึ่งกรุปปรกติเสมอ $\square$

3.3 ความเป็นปรกติของกึ่งกรุป EOP_X เมื่อ X เป็นคราวน์

แม้ว่าด้วยในหัวข้อ 3.1 เราทราบแล้วว่าโดยทั่วไป EOP_X และ O_X เมื่อ X เป็นคราวน์ อาจไม่มีความสัมพันธ์ในเชิงการเป็นกึ่งกรุปย่อย แต่ในหัวข้อนี้ จะเริ่มต้นการศึกษาในการหาเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการเท่ากันของเซต EOP_X และ O_X ตามลำดับ ทั้งนี้เป็นเพราะว่า ในภายหลังเราจะศึกษาความเป็นปรกติของ O_X เมื่อ X เป็นคราวน์

ทฤษฎีบท 3.3.1 ให้ $(X;\leq)$ เป็นคราวน์ และ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X แล้ว $E = X \times X$ ก็ต่อเมื่อ $EOP_X = O_X$

บทพิสูจน์ สมมติว่า $E = X \times X$ จะแสดงว่า $EOP_X = O_X$

ให้ $\alpha \in EOP_X$ จะแสดงว่า $\alpha \in O_X$ นั่นคือจะแสดงว่า $x\alpha \leq y\alpha$ สำหรับทุกๆ $x, y \in X$ ซึ่ง $x \leq y$

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $x \leq y$ เพราะว่า $E = X \times X$ จึงได้ว่า $(x, y) \in X \times X = E$ ทำให้ได้ว่า $(x, y) \in E \cap \leq$ เนื่องจาก $\alpha \in EOP_X$ จึงได้ว่า $(x\alpha, y\alpha) \in E \cap \leq$ ทำให้ได้ว่า $x\alpha \leq y\alpha$ ดังนั้น $\alpha \in O_X$ เพราะฉะนั้น $EOP_X \subseteq O_X$

ต่อไปจะแสดงว่า $O_X \subseteq EOP_X$

ให้ $\alpha \in O_X$ จะแสดงว่า $\alpha \in EOP_X$ นั่นคือจะแสดงว่า $(x\alpha, y\alpha) \in E \cap \leq$ สำหรับทุก ๆ $(x, y) \in E \cap \leq$

ให้ $(x, y) \in E \cap \leq$ จะได้ว่า $(x, y) \in E$ และ $x \leq y$ เพราะว่า α เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ จึงได้ว่า $x\alpha \leq y\alpha$ เนื่องจาก $x\alpha, y\alpha \in X$ จึงได้ว่า $(x\alpha, y\alpha) \in X \times X = E$ ทำให้ได้ว่า $(x\alpha, y\alpha) \in E \cap \leq$ ดังนั้น $\alpha \in EOP_X$ จากการพิสูจน์ข้างต้น เราจึงสรุปได้ว่า $EOP_X = O_X$

ในทางกลับกันสมมติว่า $EOP_X = O_X$ จะแสดงว่า $E = X \times X$ โดยการพิสูจน์แบบหาข้อขัดแย้ง

สมมติว่า $E \neq X \times X$ จะได้ว่า $\left| X/E \right| \geq 2$ ทำให้ได้ว่ามี $A, B \in X/E$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่างและ $A \neq B$ เนื่องจาก X/E เป็นผลแบ่งกั้นของ X จึงได้ว่า $A \cap B = \varnothing$ จาก $A \neq \varnothing$ และ $B \neq \varnothing$ จะมี $a \in A$ และ $b \in B$ เพราะว่า $A \cap B = \varnothing$ จึงได้ว่า $a \neq b$

ให้ α เป็นฟังก์ชันบน X ที่นิยามโดย

$$x\alpha = \begin{cases} a, \text{ถ้า } x \in B \\ b, \text{ถ้า } x \in X \setminus B \end{cases}$$

จะแสดงว่า $\alpha \in EOP_X$

ให้ $(x, y) \in E \cap \leq$ จะได้ว่า $(x, y) \in E$ และ $x \leq y$ จาก $(x, y) \in E$ จะได้ว่า $[x]_E = [y]_E$

ถ้า $[x]_E = B$ แล้วจะได้ว่า $x\alpha = a = y\alpha$ ทำให้ได้ว่า $(x\alpha, y\alpha) \in E \cap \leq$

ถ้า $[x]_E \neq B$ แล้วจะได้ว่า $x\alpha = b = y\alpha$ ทำให้ได้ว่า $(x\alpha, y\alpha) \in E \cap \leq$

จากทั้ง 2 กรณีพิสูจน์ได้ว่า $\alpha \in EOP_X$

ต่อไปจะแสดงว่า $\alpha \notin O_X$ โดยพิจารณา a, b ออกเป็น 3 กรณี ดังนี้

ถ้า $a < b$ แล้วจาก $a \in A$ และ $b \in B$ จะได้ว่า $a\alpha = b > a = b\alpha$ ดังนั้น $\alpha \notin O_X$

ถ้า $a > b$ แล้วจาก $a \in A$ และ $b \in B$ จะได้ว่า $a\alpha = b < a = b\alpha$ ดังนั้น $\alpha \notin O_X$

ถ้า $a \| b$ แล้วจะได้ว่า $a \nless b$ หรือ $a \ngtr b$ ดังนั้น $\alpha \notin O_X$

เพราะว่า $\alpha \in EOP_X$ แต่ $\alpha \notin O_X$ จึงได้ว่า $EOP_X \neq O_X$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $E = X \times X$ □

ใน ปี ค.ศ. 2010 มา ยู เลา หยาง และ หวาง (MA, 2010) ได้ศึกษาสมบัติของ EOP_X เมื่อ X เป็นเซตอันดับเชิงเส้น เขาได้ให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการเท่ากันของ EOP_X และ T_X โดยการพิสูจน์ว่า $E = \Delta_X$ ก็ต่อเมื่อ $EOP_X = T_X$ เมื่อ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X ดังนั้นเราจึงสนใจว่า เมื่อ X เป็นคราวน์จะพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันหรือไม่

ลำดับต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า ในกรณีที่ X เป็นคราวน์ จะได้เพียงว่า " ถ้า $E = \Delta_X$ แล้ว $EOP_X = T_X$ " แต่บทกลับของข้อความนี้อาจเป็นเท็จ

ทฤษฎีบท 3.3.2 ให้ $(X;\leq)$ เป็นคราวน์ และ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X ถ้า $E = \Delta_X$ แล้ว $EOP_X = T_X$

บทพิสูจน์ สมมติว่า $E = \Delta_X$ จากบทนิยามของ EOP_X เราทราบว่า $EOP_X \subseteq T_X$ ในการแสดงว่า $EOP_X = T_X$ จึงเหลือแต่เพียงแสดงว่า $T_X \subseteq EOP_X$

ให้ $\alpha \in T_X$ และ $(x, y) \in E \cap \leq$ จะได้ว่า $(x, y) \in E = \Delta_X$ ทำให้ได้ว่า $x = y$ ดังนั้น $x\alpha = y\alpha$ ทำให้ได้ว่า $(x\alpha, y\alpha) \in \Delta_X = E$ และ $x\alpha \leq y\alpha$ นั่นคือ $(x\alpha, y\alpha) \in E \cap \leq$ เราจึงพิสูจน์ได้ว่า $T_X \subseteq EOP_X$ ดังนั้น $EOP_X = T_X$ □

ทฤษฎีบท 3.3.3 ให้ $(X;\leq)$ เป็นคราวน์ เมื่อ $X = \{a_1, a_2, ..., a_{2n-1}\}$ และ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X ถ้า $E = \Delta_X \cup \{(a_i, a_{i+2}), (a_{i+2}, a_i)\}$ เมื่อ $i \in \{1, ..., 2n-2\}$ แล้ว $EOP_X = T_X$

บทพิสูจน์ ให้ $(X;\leq)$ เป็นคราวน์ จะได้ว่า $|X| \geq 4$ สมมติว่า $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{2n}\}$ เป็นสมาชิกที่ต่างกันของ X ซึ่ง $a_1 \leq a_2 \geq a_3 \leq a_4 ... \geq a_{n-1} \leq a_{2n} \geq a_1$ จาก X เป็นคราวน์ จะได้ว่า $a_i \| a_{i+2}$ นั่นคือ $\{(a_i, a_{i+2}), (a_{i+2}, a_i)\} \notin \leq$

ให้ $E = \Delta_X \cup \{(a_i, a_{i+2}), (a_{i+2}, a_i)\}$ จะได้ว่า E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X และ $E \cap \leq = \Delta_X$ จะแสดงว่า $EOP_X = T_X$

ให้ $\alpha \in T_X$ และ $(a,b) \in E \cap \leq$ จาก $E \cap \leq = \Delta_X$ จะได้ว่า $a = b$ ทำได้ว่า $a\alpha = b\alpha$ ดังนั้น $(a\alpha, b\alpha) \in E \cap \leq$ ทำให้ได้ว่า $\alpha \in EOP_X$ เพราะฉะนั้น $T_X \subseteq EOP_X$ แต่ $EOP_X = \{\alpha \in T_X \mid \alpha$ ยืนยง $E \cap \leq\}$ จึงได้ว่า $EOP_X \subseteq T_X$ ดังนั้น $EOP_X = T_X$ □

จากทฤษฎีบท 3.3.2 และทฤษฎีบท 3.3.3 เราทราบว่า $E = \Delta_X$ เป็นเพียงเงื่อนไขเพียงพอในการเท่ากันของ $EOP_X = T_X$ ทฤษฎีบทต่อไปจะให้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอในการเท่ากันของ EOP_X และ T_X

ทฤษฎีบท 3.3.4 ให้ $(X;\leq)$ เป็นคราวน์ และ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X แล้ว $E \cap \leq = \Delta_X$ ก็ต่อเมื่อ $EOP_X = T_X$

บทพิสูจน์ สมมติว่า $E \cap \leq = \Delta_X$ จากบทนิยามของเซต EOP_X เราทราบว่า $EOP_X \subseteq T_X$ ในการแสดงว่า $EOP_X = T_X$ จึงเหลือแต่เพียงแสดงว่า $T_X \subseteq EOP_X$

ให้ $\alpha \in T_X$ จะแสดงว่า $\alpha \in EOP_X$

ให้ $(a,b) \in E \cap \leq$ จาก $E \cap \leq = \Delta_X$ จะมี $(a,b) \in \Delta_X$ ทำให้ได้ว่า $a = b$ ดังนั้น $a\alpha = b\alpha$ ทำให้ได้ว่า $(a\alpha, b\alpha) \in \Delta_X = E \cap \leq$ เราจึงพิสูจน์ได้ว่า $T_X \subseteq EOP_X$ ดังนั้น $EOP_X = T_X$

ในทางกลับกันสมมติว่า $EOP_X = T_X$ จะแสดงว่า $E \cap \leq = \Delta_X$ โดยการพิสูจน์แบบหาข้อขัดแย้ง

สมมติว่า $E \cap \leq \neq \Delta_X$ จะมี $(a,b) \in E \cap \leq$ ซึ่ง $a \neq b$

ให้ α เป็นฟังก์ชันบน X ที่นิยามโดย

$$x\alpha = \begin{cases} a, \text{ถ้า } x = b \\ b, \text{ถ้า } x \neq b \end{cases}$$

จาก $EOP_X = T_X$ จะได้ว่า $\alpha \in EOP_X$ ทำให้ได้ว่า $(a\alpha, b\alpha) \in E \cap \leq$ ดังนั้น $(b,a) \in E \cap \leq$ เพราะฉะนั้น $(b,a) \in \leq$ และ $(a,b) \in \leq$ โดยสมบัติปฏิสมมาตรของ $\leq$ จะได้ว่า $a = b$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้น $E \cap \leq = \Delta_X$ □

ต่อไปเราจะศึกษาความเป็นปรกติของกึ่งกรุป EOP_X เมื่อ X เป็นคราวน์ แต่ก่อนอื่นจะศึกษาความปรกติบริบูรณ์ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะของความเป็นปรกติของกึ่งกรุปของการแปลงยืนยงอันดับบนคราวน์เสียก่อน

เป็นที่ทราบกันดีว่า กึ่งกรุปของการแปลงไม่จำเป็นต้องเป็นกึ่งกรุปปรกติบริบูรณ์ ด้วยเหตุนี้จึงเกิดคำถามว่า "O_X จะเป็นกึ่งกรุปปรกติบริบูรณ์หรือไม่" คำตอบของคำถามนี้ แสดงในทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบท 3.3.5 ให้ $(X;\leq)$ เป็นคราวน์ แล้ว O_X ไม่เป็นกึ่งกรุปปรกติบริบูรณ์

บทพิสูจน์ ให้ $(X;\leq)$ เป็นคราวน์ จากบทนิยามคราวน์ จะได้ว่า $|x| \geq 4$ ทำให้ได้ว่ามี $a\ b\ c$ และ d ใน X ที่แตกต่างกันทั้งหมดซึ่ง $a < b > c < d$ และ $a < d$ หรือ $a > b < c > d$ และ $a > d$

โดยไม่เสียในทั่วไป เราสมมติว่า $a < b > c < d$ และ $a < d$ จึงได้ว่า a และ c เป็นสมาชิกเล็กสุดเฉพาะกลุ่ม ในขณะที่ b และ d เป็นสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม

ให้ α เป็นฟังก์ชันบน X ที่นิยามโดย

$$x\alpha = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นสมาชิกเล็กสุดเฉพาะกลุ่ม และ } x \neq a \\ b & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ต่อไปจะแสดงว่า α เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $x \leq y$ จะแสดงว่า $x\alpha \leq y\alpha$

<u>กรณี 1</u> x เป็นสมาชิกเล็กสุดเฉพาะกลุ่ม และ $x \neq a$ จากบทนิยามของ α จะได้ว่า $x\alpha = a$ และ $y\alpha \in \{a,b\}$ แต่จาก $a \leq b$ และ $a \leq a$ จึงได้ว่า $x\alpha = a \leq y\alpha$

<u>กรณี 2</u> x เป็นสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม เพราะว่า $x \leq y$ จึงได้ว่า $x = y$ ทำให้ได้ว่า $x\alpha \leq y\alpha$

<u>กรณี 3</u> $x = a$ จะได้ว่า $x\alpha = b$ จาก $x \leq y$ จะได้ว่า $y = a$ หรือ y เป็นสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม ทำให้ได้ว่า $y\alpha = b = x\alpha$

จากทั้ง 3 กรณี เราได้ว่า α เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

สุดท้ายจะแสดงว่า α ไม่เป็นสมาชิกปรกติบริบูรณ์

เนื่องจาก $c\alpha^3 = (c\alpha)\alpha^2 = (a\alpha)\alpha = b\alpha = b \neq a = c\alpha$ ดังนั้น $\alpha^3 \neq \alpha$ ทำให้ได้ว่า α ไม่เป็นสมาชิกปรกติบริบูรณ์ เพราะฉะนั้น O_X ไม่เป็นกึ่งกรุปปรกติบริบูรณ์ $\square$

บทแทรก 3.3.6 เป็นผลโดยตรงจาก ทฤษฎีบท 3.3.1 และ ทฤษฎีบท 3.3.5 ตามลำดับ

บทแทรก 3.3.6 ให้ $(X;\leq)$ เป็นคราวน์ และ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X ซึ่ง $E = X \times X$ แล้ว EOP_X ไม่เป็นกึ่งกรุปปรกติบริบูรณ์

ต่อไปเราจะศึกษาสมาชิกปรกติของ EOP_X เมื่อ X เป็นคราวน์ ก่อนอื่นจะศึกษาสมาชิกปรกติของการแปลงยืนยงอันดับบนคราวน์ นั่นคือสมาชิกปรกติของกึ่งกรุป O_X เมื่อ X เป็นคราวน์

ทฤษฎีบท 3.3.7 ให้ $(X;\leq)$ เป็นคราวน์ และ $\alpha \in O_X$ ถ้า $|ran\alpha| = 1$ แล้ว α เป็นสมาชิกปรกติใน O_X

บทพิสูจน์ ให้ $\alpha \in O_X$ โดยที่ $|ran\alpha| = 1$ สมมติว่า $x\alpha = a$ สำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า $x\alpha^3 = ((x\alpha)\alpha)\alpha = (a\alpha)\alpha = a\alpha = a = x\alpha$ ทั้งนี้เป็นเพราะว่ามี $\beta = \alpha \in O_X$ ซึ่ง $\alpha\beta\alpha = \alpha$ ดังนั้น α เป็นสมาชิกปรกติใน O_X □

ทฤษฎีบท 3.3.8 ให้ $(X;\leq)$ เป็นคราวน์ และ $\alpha \in O_X$ ถ้า $|ran\alpha| = 2$ แล้ว α เป็นสมาชิกปรกติใน O_X

บทพิสูจน์ สมมติว่า $X = \{a_1, a_2, ..., a_{2n}\}$ และให้ $\alpha \in O_X$ โดยที่ $|ran\alpha| = 2$ จะได้ว่า $ran\alpha$ เป็นโซ่ที่มีขนาด 2

เริ่มต้นจะแสดงว่ามีโซ่ C ที่มีขนาด 2 ซึ่ง $C\alpha = ran\alpha$ โดยการพิสูจน์แบบหาข้อขัดแย้ง

สำหรับแต่ละ $i \in \{1, ..., 2n-1\}$ กำหนดให้ $C_i = \{a_i, a_{i+1}\}$

สมมติว่าไม่มีโซ่ C ที่มีขนาด 2 ซึ่ง $C\alpha = ran\alpha$ จะได้ว่า C_i เป็นโซ่ที่มีขนาด 2 จะได้ว่า $C_i\alpha \subset ran\alpha$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1, ..., 2n-1\}$ เพราะว่า $|ran\alpha| = 2$ จึงได้ว่า $|C_i\alpha| = 1$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1, ..., 2n-1\}$ ดังนั้น $a_i\alpha = a_{i+1}\alpha$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1, ..., 2n-1\}$ เพราะฉะนั้น

$a_1\alpha = a_2\alpha = ... = a_i\alpha = \ a_{i+1}\alpha = ... = a_{2n}\alpha$ ทำให้ได้ว่า $|ran\alpha| = 1$ เกิดข้อขัดแย้ง เราจึงได้ว่ามีโซ่ C ที่มีขนาด 2 ซึ่ง $C\alpha = ran\alpha$

ต่อไปให้ $ran\alpha = \{a_i, a_{i+1}\}$ จะมีโซ่ $C = \{a_k, a_{k+1}\}$ ซึ่ง $C\alpha = ran\alpha = \{a_i, a_{i+1}\}$

โดยไม่เสียนัยความเป็นทั่วไป สมมติว่า $a_k\alpha = a_i$ และ $a_{k+1}\alpha = a_{i+1}$ และ ให้ β เป็นฟังก์ชันบน X ที่นิยามโดย

$$x\beta \begin{cases} a_{k+1}, x = a_{i+1} \\ a_k, x \neq a_{i+1} \end{cases}$$

ต่อไปจะแสดงว่า β เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $x \le y$ จะแสดงว่า $x\beta \le y\beta$

<u>กรณี 1</u> $x = a_{i+1}$ จะได้ว่า $x\beta = a_{k+1}$ จาก $x \le y$ และ x เป็นสมาชิกใหญ่สุด จึงได้ว่า $x = y$ ทำให้ได้ว่า $x\beta = a_{k+1} = y\beta$ ดังนั้น $x\beta \le y\beta$

<u>กรณี 2</u> $x \neq a_{i+1}$ จะได้ว่า $x\beta = a_k$ และ $y\beta = \{a_k, a_{k+1}\}$ จึงได้ว่า $x\beta \le y\beta$ ดังนั้น β เป็นฟังก์ชันยืนยงอันดับ

สุดท้ายจะแสดงว่า $\alpha\beta\alpha = \alpha$

ให้ $x \in X$ พิจารณา x เป็น 2 กรณี

<u>กรณี 1</u> $x = a_{k+1}$ จะได้ว่า $x\alpha\beta\alpha = (a_{k+1}\alpha)\beta\alpha = (a_{i+1}\beta)\alpha = a_{k+1}\alpha = a_{i+1} = x\alpha$

<u>กรณี 2</u> $x \neq a_{k+1}$ จาก $ran\alpha = \{a_i, a_{i+1}\}$ จะได้ว่า $x\alpha = a_i$ หรือ $x\alpha = a_{i+1}$ ถ้า $x\alpha = a_i$ ได้ว่า $(x\alpha)\beta\alpha = (a_i\beta)\alpha = a_k\alpha = a_i = x\alpha$ ถ้า $x\alpha = a_{i+1}$ จะได้ว่า $(x\alpha)\beta\alpha = (a_{i+1}\beta)\alpha = a_{k+1}\alpha = a_{i+1} = x\alpha$ จากทั้ง 2 กรณี จะได้ว่า $\alpha\beta\alpha = \alpha$ ดังนั้น α เป็นสมาชิกปรกติใน O_X □

รายการอ้างอิง

1. JENDANA, K., SRITHUS, R. (2015). Regularity of order-preserving self-mapping semigroups of fences. *Commun. Korean Math. Soc.30. 2015. p. 349-361*.
2. MA, M., YOU, T., LUO , SH., YANG, Y., WANG, L. (2010). Regularity and Green's relations for finite E-order-preserving transformations semigroups. *Semigroup Forum 80 2010. p. 164-173*.
3. PEI, H. S. (2005). Regularity and Green's ralations for semigroups of transformations that preserve an equivalence. *Commun. Algabra 33 2005. p. 109-118*.
4. PEI, H. S., ZOU, D.Y. (2005). Green's equivalences on semigroups of transformations preserving order and an equivalence relation. *Semigroup Forum 71 2005. p. 241-251*.
5. TANYAWONG, R., SRITHUS, R. (2016). Regular subsemigroups of the semigroups of transformations preserving a fence. *Asian-Europian J. of Math. 9. 2016*.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล มณฑาทิพย์ คงประเสริฐ

วัน เดือน ปี เกิด 13 มิถุนายน 2531

สถานที่เกิด นครปฐม

วุฒิการศึกษา ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยศิลปากร พระราชวังสนามจันทร์ นครปฐม

ที่อยู่ปัจจุบัน 64/2 หมู่ที่ 3 ตำบลนครชัยศรี อำเภอนครชัยศรี จังหวัดนครปฐม 73120