จำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟหลายส่วนบริบูรณ์และกราฟดาวขยาย

โดย

นายตันติกร สว่างศรี

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2563

จำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟหลายส่วนบริบูรณ์และกราฟดาวขยาย

โดย
นายตันติกร สว่างศรี

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2563

GAME DOMINATION NUMBERS OF COMPLETE MULTIPARTITE GRAPHS AND EXTENDED STAR GRAPHS.

By

MR. Tuntikorn SAWANGSRI

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for Master of Science (MATHEMATICS STUDY)

Department of MATHEMATICS

Graduate School, Silpakorn University

Academic Year 2020

หัวข้อ	จำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟหลายส่วนบริบูรณ์และกราฟดาวขยาย
โดย	ตันติกร สว่างศรี
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เฉลิมพงศ์ วรวรรโณทัย

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร.จุไรรัตน์ นันทานิช)

พิจารณาเห็นชอบโดย

....ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รัตนา ศรีทัศน์)

....อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เฉลิมพงศ์ วรวรรโณทัย)

....ผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก

(รองศาสตราจารย์ ดร.วงศกร เจริญพานิชเสรี)

58316302 : คณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
คำสำคัญ : กราฟ/โดมิเนชันเกม/จำนวนโดมิเนชันเกม

นาย ตันติกร สว่างศรี: จำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟหลายส่วนบริบูรณ์และกราฟดาวขยาย อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เฉลิมพงศ์ วรวรรโณทัย

กราฟอย่างง่าย G ประกอบด้วยเซตของจุด V และ เซตของเส้น E ที่เชื่อมต่อระหว่างจุดสองจุด ในการศึกษาจำนวนโดมิเนชันของกราฟ G จะมีการเลือกจุดบนกราฟโดยจุดที่ถูกเลือกและจุดทุกจุดที่มีเส้นเชื่อมกับจุดที่ถูกเลือกดังกล่าว จะถือว่าเป็นจุดที่ถูกครอบคลุม ซึ่งในการเลือกจุดแต่ละครั้งนั้นอาจเลือกจุดที่ถูกครอบคลุมแล้วหรือจุดที่ยังไม่ถูกครอบคลุมก็ได้ แต่จะต้องเกิดการครอบคลุมเพิ่มขึ้นอย่างน้อยหนึ่งจุด และเรียกจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเลือกจุดเพื่อให้ทุกจุดบน G ถูกครอบคลุมว่าจำนวนโดมิเนชันของ G เขียนแทนด้วย $\gamma_g(G)$ ต่อมามีการดัดแปลงให้เป็นเกมทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่าเกมโดมิเนชัน โดยมีผู้เล่นสองฝ่ายผลัดกันเลือกจุดครั้งละ 1 จุด เพื่อครอบคลุมจุดบนกราฟเดียวกัน และเกมจะสิ้นสุดเมื่อจุดทุกจุดบนกราฟถูกครอบคลุม ในการเล่นผู้เล่นแต่ละฝ่ายมีเป้าหมายต่างกัน ฝ่ายหนึ่งเลือกจุดเพื่อให้เกมสิ้นสุดเร็วที่สุดเรียกผู้เล่นนี้ว่าโดมิเนเตอร์ ผู้เล่นอีกฝ่ายมีเป้าหมายคือการเล่นเพื่อให้เกมสิ้นสุดช้าที่สุดเรียกผู้เล่นนี้ว่าสตอลเลอร์ เกมโดมิเนชันจะแตกต่างจากเกมทั่วไป ซึ่งมีผลลัพธ์คือ แพ้ ชนะ หรือเสมอ เกมโดมิเนชันจะไม่มีการตัดสินผลแพ้ชนะของผู้เล่นแต่จะเน้นการศึกษาถึงกลยุทธการเล่นที่ดีที่สุดของผู้เล่นแต่ละคน เนื่องจากการเริ่มเล่นก่อนหรือหลังอาจมีผลต่อจำนวนครั้งในการเล่นเกม ดังนั้นในการศึกษาจึงแบ่งเกมออกเป็นสองลักษณะคือ เกมที่โดมิเนเตอร์เป็นฝ่ายเล่นก่อน กับเกมที่สตอลเลอร์เป็นฝ่ายเล่นก่อน และเรียกจำนวนครั้งในการเลือกจุดบน G เมื่อผู้เล่นทั้งสองฝ่ายเล่นดีที่สุดเพื่อให้ทุกจุดบน G ถูกครอบคลุมว่า จำนวนเกมโดมิเนชันของ G โดย $\gamma_g(G)$ แทนจำนวนเกมโดมิเนชันของ G เมื่อโดมิเนเตอร์เป็นฝ่ายเล่นก่อน และ $\gamma_g'(G)$ แทนจำนวนเกมโดมิเนชันของ G เมื่อสตอลเลอร์เป็นฝ่ายเล่นก่อน วิทยานิพนธ์นี้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษากราฟหลายส่วนบริบูรณ์ กราฟดาวขยาย S_k^2 และ S_k^3เพื่อหารูปทั่วไปของจำนวนโดมิเนชันและจำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟดังกล่าวให้เป็นประโยชน์ต่อผู้ที่ต้องการศึกษาต่อไป

58316302 : Major (MATHEMATICS STUDY)

Keyword : GRAPHS / DOMINATION GAME / GAME DOMINATION NUMBER

MR. TUNTIKORN SAWANGSRI : GAME DOMINATION NUMBERS OF COMPLETE MULTIPARTITE GRAPHSAND EXTENDED STAR GRAPHS. THESIS ADVISOR : ASSISTANT PROFESSOR CHALERMPONG WORAWANNOTAI, Ph.D.

A simple graph G consists of a set of vertices and a set of edges connecting between two vertices. In the study of domination on a graph, vertices on the graph are selected; the selected vertices and all vertices that have edges connected to the selected vertices are considered dominated. A vertex can be selected if selecting it results in at least one new vertex being dominated. The smallest number of selected vertices so that every vertex on G is dominated is called the domination number of G, denoted by γ (G). It was later adapted to a mathematical game called domination game, where two players take turns picking one vertex at a time to dominate the vertices in the same graph, and the game ends when all the vertices on the graph are dominated. Each player has different goals, one player chooses vertices to end the game as quickly as possible; this player is called Dominator. The other player's goal is for the game to end as late as possible; this player is called Staller. Domination game differs from regular games which have results in loss, win or draw. The domination game will not have winners, but it focuses on the study of the best playing strategies of each player. Who starts the game may affect the number of moves to finish a game, so the game is divided into two types: game started by Dominator and game started by Staller. The number of moves to finish the game on when both players use optimal strategies is the game domination number of G, where γ_g(G) represents the game domination number when Dominator starts the game and γ_g'(G) represents the game domination number when the Staller starts the game. In this thesis, we are interested in studying the complete multipartite graphs, the extended star graphs S_k^2 and S_k^3 to find their domination numbers and game domination numbers.

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เฉลิมพงศ์ วรวรรโณทัย อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่ท่านทุ่มเทถ่ายทอดความรู้และข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ในการจัดทำวิทยานิพนธ์ และขอขอบพระคุณท่านอาจารย์และบุคลากรภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากรทุกท่านที่ให้การสนับสนุนการจัดทำวิทยานิพนธ์นี้ และตลอดการเรียนรู้ปริญญาโทสาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา

ตันติกร สว่างศรี

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

กราฟเป็นพื้นฐานโครงสร้างคณิตศาสตร์ที่จำเป็นสำหรับวิทยาการคอมพิวเตอร์ และทฤษฎีกราฟทั้งยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับ web search, network, database, artificial intelligent เป็นต้น ในการ ศึกษาทางคณิตศาสตร์จึงมีการศึกษาถึงสมบัติของกราฟลักษณะต่าง ๆ เพื่อการพัฒนาและนำไปประยุกต์ใช้ในลำดับต่อไป เช่น การศึกษาจำนวนโดมิเนชันของกราฟอย่างง่าย G ที่ประกอบด้วยเซตของจุด V และ เซตของเส้น E ที่เชื่อมต่อระหว่างจุดสองจุดที่ไม่มีลูปและมีอย่างมากเพียง 1 เส้นเชื่อมระหว่าง 2 จุดใด ๆ ในกราฟ ในการศึกษาโดมิเนชันของกราฟจะมีการเลือกจุดบนกราฟโดยจุดที่ถูกเลือกและจุดทุกจุดที่มีเส้นเชื่อมกับจุดที่ถูกเลือกดังกล่าวจะถือว่าเป็นจุดที่ถูกครอบคลุม (Dominated vertices) ซึ่งในการเลือกจุดแต่ละครั้งนั้นอาจเลือกจุดที่ถูกครอบคลุมแล้ว หรือจุดที่ยังไม่ถูกครอบคลุมก็ได้ แต่ในทุกครั้งของการเลือกจุดนั้น จะต้องเกิดการครอบคลุมเพิ่มขึ้นอย่างน้อยหนึ่งจุด ในการศึกษาการครอบคลุมบนกราฟ G จะเรียกจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการเลือกจุดเพื่อให้ทุกจุดบน G ถูกครอบคลุมว่าจำนวนโดมิเนชันของ G เขียนแทนด้วย $\gamma(G)$ ซึ่งมีประโยชน์ในหลายด้าน เช่น สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการติดตั้งตัวรับส่งสัญญาณต่าง ๆ ให้ใช้ตัวรับส่งสัญญาณน้อยที่สุดที่ครอบคลุมพื้นที่ที่ต้องการ หรือปัญหาต่าง ๆ ที่มีข้อจำกัดที่ใกล้เคียงกับการศึกษาจำนวนโดมิเนชันของกราฟ ซึ่งสามารถศึกษาถึงประโยชน์ของโดมิเนชันเพิ่มเติมได้จาก [5] และ [6] จึงทำให้มีการวิจัยศึกษาจำนวนโดมิเนชันอย่างแพร่หลายและมีการดัดแปลงโดมิเนชั่นแบบต่าง ๆ ขึ้น เช่นในปี พ.ศ. 2553 Boštjan Brešar, Sandi Klavžar และ Douglas F. Rall [2] ได้ดัดแปลงโดมิเนชันให้เป็นเกมทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่าเกมโดมิเนชัน โดยมีผู้เล่นสองฝ่ายผลัดกันเลือกจุดครั้งละ 1 จุด เพื่อครอบคลุมจุดบนกราฟเดียวกันและเกมจะสิ้นสุดเมื่อจุดทุกจุดบนกราฟถูกครอบคลุม ในการเล่นผู้เล่นแต่ละฝ่ายมีเป้าหมายต่างกัน ฝ่ายหนึ่งเลือกจุดเพื่อให้เกมสิ้นสุดเร็วที่สุดเรียกผู้เล่นนี้ว่า Dominator ผู้เล่นอีกฝ่ายมีเป้าหมายคือการเล่นเพื่อให้เกมสิ้นสุดช้าที่สุดเรียกผู้เล่นนี้ว่า Staller เกมโดมิเนชันจะแตกต่างจากเกมทั่วไป ซึ่งมีผลลัพธ์คือแพ้ ชนะ หรือเสมอ แต่เกมโดมิเนชันจะไม่มีการตัดสินผลแพ้ชนะของผู้เล่น แต่จะเน้นการศึกษาถึงกลยุทธการเล่นที่ดีที่สุดของผู้เล่นแต่ละคน และเนื่องจากการเริ่มเล่นก่อนหรือหลัง อาจมีผลต่อจำนวนครั้งในการเล่นเกม ดังนั้นในการศึกษาจึงแบ่งเกมออกเป็นสองลักษณะคือ เกมที่ Dominator เป็นฝ่ายเล่นก่อนและเกมที่ Staller เป็นฝ่ายเล่นก่อน เรียกจำนวนครั้งในการเลือกจุดบนกราฟ G เมื่อผู้เล่นทั้งสองฝ่ายเล่นดีที่สุดเพื่อให้ทุกจุดบน G ถูกครอบคลุมว่า จำนวนเกมโดมิเนชันของ G โดย $\gamma_g(G)$ แทนจำนวนเกมโดมิเนชันของ G เมื่อ Dominator เป็นฝ่ายเล่นก่อน และ $\gamma'_g(G)$ แทนจำนวนเกมโดมิเนชันของเมื่อ Staller เป็นฝ่ายเล่นก่อน ในช่วงเวลา 10 ปีที่ผ่านมานี้ ตั้งแต่มีการดัดแปลงโดมิเนชันให้เป็นเกมทางคณิตศาสตร์ได้มีการวิจัยศึกษาจำนวนเกมโดมิเนชัน

ของกราฟในลักษณะต่าง ๆ อย่างแพร่หลาย เช่น ในปี พ.ศ. 2557 Boštjan Brešar, Paul Dorbec, Sandi Klavžar และ Gašper Košmrlj [1] ได้ทำการศึกษาถึงผลกระทบต่อจำนวนเกมโดมิเนชัน จากการลบจุดยอดบนกราฟออกเกมโดมิเนชัน จากการลบจุดยอดบนกราฟออกว่าถ้า G เป็นกราฟที่ $v \in V(G)$ แล้ว $\gamma_g(G)-\gamma_g(G-v) \le 2$ และ $\gamma'_g(G)-\gamma'_g(G-v) \le 2$ ในปี พ.ศ. 2558 Dorbec, Košmrlj, และRenault [4] ได้ศึกษาถึงผลของการรวมกันของกราฟต่อเกมโดมิเนชัน และปีเดียวกันนั้น Csilla Bujtás [3]ได้ศึกษาถึงเกมโดมิเนชันของกราฟป่า ในปี พ.ศ. 2562 Onphaeng, Ruksasakcha and Worawannotai [9] ได้ศึกษาเกี่ยวกับจำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟไม่เชื่อมโยงที่ประกอบด้วยวิถีและวัฏจักร ซึ่งเป็นเครื่องมือหลักที่จะเห็นในงานวิจัยฉบับนี้ เป็นต้น ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษากราฟหลายส่วนบริบูรณ์ กราฟดาวขยาย S_k^2 และ S_k^3 เพื่อหารูปทั่วไปของจำนวนโดมิเนชันและจำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟดังกล่าวให้เป็นประโยชน์ต่อผู้ที่ต้องการศึกษาต่อไป

บทที่ 2
บทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาเรื่องจำนวนโดมิเนชันและจำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟหลายส่วนบริบูรณ์ กราฟดาวขยายและกราฟดาวขยายกำลังสอง

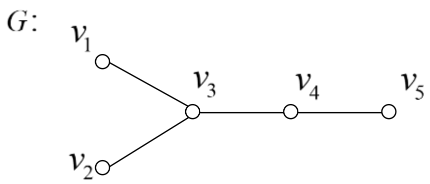
บทนิยามที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม 2.1 เราจะเรียกสับเซต S ของเซตของจุดในกราฟ G ว่า**เซตครอบคลุม (dominating set)** ของ G ถ้าแต่ละจุดใน G อยู่ใน S หรือประชิดกับบางจุดใน S

บทนิยาม 2.2 จำนวนโดมิเนชัน (domination number) ของกราฟ G คือ ขนาดของเซตครอบคลุมที่เล็กที่สุดของ G เขียนแทนด้วย $\gamma(G)$

บทนิยาม 2.3 เกมโดมิเนชันบนกราฟ G เป็นเกมที่มีผู้เล่นสองฝ่ายผลัดกันเลือกจุดครั้งละ 1 จุด เพื่อครอบคลุมจุดบนกราฟนี้และเกมจะสิ้นสุดเมื่อจุดทุกจุดบนกราฟถูกครอบคลุม ในการเล่นผู้เล่นแต่ละฝ่ายมีเป้าหมายต่างกัน ฝ่ายหนึ่งเลือกจุดเพื่อให้เกมสิ้นสุดเร็วที่สุดเรียกผู้เล่นนี้ว่า Dominator ผู้เล่นอีกฝ่ายมีเป้าหมายคือการเล่นเพื่อให้เกมสิ้นสุดช้าที่สุดเรียกผู้เล่นนี้ว่า Staller **จำนวนเกมโดมิเนชัน (game domination number)** คือ จำนวนครั้งในการเลือกจุดบน G ของผู้เล่นทั้งสองฝ่ายรวมกันเมื่อเกมสิ้นสุดลง และผู้เล่นทั้งสองฝ่ายเล่นดีที่สุด เขียนแทนด้วย $\gamma_g(G)$ เมื่อเป็นเกมที่ Dominator เป็นฝ่ายเล่นก่อน และเขียนแทนด้วย $\gamma'_g(G)$ เมื่อเป็นเกมที่ Staller เป็นฝ่ายเล่นก่อน

ตัวอย่าง เกมโดมิเนชันที่เล่นบนกราฟ G ดังนี้

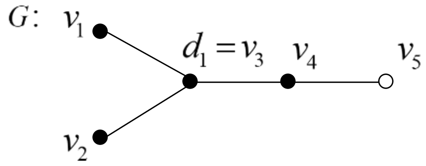


ภาพที่ 1 : กราฟ G

กำหนดให้ d_n แทนจุดที่ถูกเลือกในการเล่นครั้งที่ n ของ Dominator

และ s_n แทนจุดที่ถูกเลือกในการเล่นครั้งที่ n ของ Staller

โดย ○ แทนจุดที่ยังไม่ถูกครอบคลุม และ ● แทนจุดที่ถูกครอบคลุมแล้ว

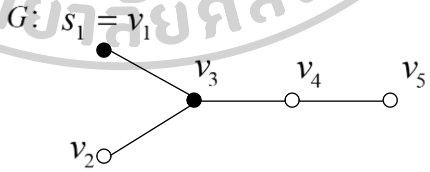


ภาพที่ 2 : เกมโดมิเนชันบน G ที่ Dominator เริ่มก่อนที่ $d_1 = v_3$

พิจารณาเกมที่ Dominator เป็นฝ่ายเริ่มเล่นก่อนจากภาพที่ 1 สังเกตได้ว่ากราฟ G ไม่มีจุดยอดใดที่มีเส้นเชื่อมไปหาจุดทุกจุดที่เหลือในกราฟ ทำให้ไม่สามารถจบได้ในการเล่น 1 ครั้งดังนั้น $\gamma_g(G) \ge 2$

สมมติให้ Dominator เริ่มเล่นครั้งแรกที่ v_3 ($d_1 = v_3$) ทำให้ตอนนี้เหลือเพียง v_5 จุดเดียวที่ยังไม่ถูกครอบคลุม เนื่องจาก Staller จะต้องเล่นโดยเพิ่มการครอบคลุมอย่างน้อยหนึ่งจุด จะได้ว่า $s_1 \in \{v_4, v_5\}$ ซึ่งเป็นการครอบคลุม v_5 จึงทำให้เกมจบใน 2 ครั้ง ในเกมนี้จะเห็นได้ว่าการที่ Dominator เริ่มเล่นครั้งแรกที่ v_3 สามารถทำให้ผลรวมของจำนวนครั้งในการเล่นของทั้งสองฝ่ายเท่ากับ 2 ครั้งได้เสมอ ไม่ว่า Staller จะเล่นอย่างไรก็ตาม ทำให้สามารถสรุปได้ว่า $\gamma_g(G) \le 2$

จากที่เราแสดงได้ว่า $\gamma_g(G) \ge 2$ และ $\gamma_g(G) \le 2$ ดังนั้น $\gamma_g(G) = 2$



ภาพที่ 3 : เกมโดมิเนชันบน G ที่ Staller เริ่มก่อนที่ $s_1 = v_1$

ถัดมาพิจารณาเกมที่ Staller เป็นฝ่ายเริ่มเล่นก่อน สมมติให้ Staller เริ่มเล่นครั้งแรกที่ v_1 ทำให้ Dominator จะต้องเลือก $d_1 \in \{v_3, v_4, v_5\}$ เพื่อบังคับให้ Staller จบเกมในการเล่นครั้งต่อไป ในเกมนี้จะเห็นได้ว่าการที่ Staller เริ่มเล่นครั้งแรกที่ v_1 สามารถทำให้ผลรวมของจำนวนครั้งในการเล่นของทั้งสองฝ่ายอย่างน้อย 3 ครั้งได้เสมอ ไม่ว่า Dominator จะเล่นอย่างไรก็ตาม ทำให้สามารถสรุปได้ได้ว่า $\gamma_g'(G) \ge 3$

พิจารณาการโต้กลับของ Dominator แบ่งตามการเริ่มเล่นของ Staller ดังนี้

กรณีที่ 1 $s_1 = v_3$ ทำให้เหลือเพียง v_5 จุดเดียวที่ยังไม่ถูกครอบคลุมเห็นได้ชัดว่าเกมจะจบในการเล่นรวม 2 ครั้ง

กรณีที่ 2 $s_1 \in \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ ให้ Dominator โต้กลับที่ v_3 ซึ่งการเล่นจุดนี้จะครอบคลุมทุกจุดยกเว้น v_5 ดั้งนั้น หากการเล่นในครั้งแรกของ Staller ครอบคลุม v_5 จะได้ผลรวมในการเล่นเท่ากับ 2 ครั้ง แต่ถ้าการเล่นในครั้งแรกของ Staller ไม่ครอบคลุม v_5 จะได้ผลรวมในการเล่นเท่ากับ 3 ครั้ง

ไม่ว่า Staller จะเล่นอย่างไรก็ตาม Dominator สามารถทำให้ผลรวมของจำนวนครั้งในการเล่นของทั้งสองฝ่ายจะไม่เกิน 3 ครั้ง นั่นคือ $\gamma'_g(G) \le 3$

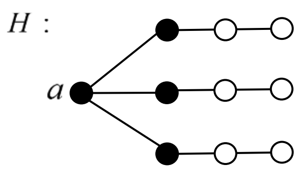
จากที่เราแสดงได้ว่า $\gamma'_g(G) \ge 3$ และ $\gamma'_g(G) \le 3$ ดังนั้น $\gamma'_g(G) = 3$

บทนิยาม 2.4 ให้ V แทนเซตของจุดยอดของกราฟ G สำหรับ $S \subseteq V$ ให้ $G|S$ แสดงถึงกราฟ G ซึ่งทุกจุดยอดในเซต S ถูกครอบคลุมแล้ว และถ้า $S = \{x\}$ สามารถเขียน $G|x$ แทนกราฟ G ที่จุดยอด x ถูกครอบคลุมแล้ว

บทนิยาม 2.5 สำหรับกราฟที่บางจุดถูกครอบคลุมไปแล้ว เราจะเรียกกราฟที่ได้จากการลบจุดที่เล่นไม่ได้แล้ว (จุดที่เลือกแล้วไม่ครอบคลุมจุดใหม่เพิ่ม) ทั้งหมดออกว่า**กราฟตกค้าง** (residual graph) ของกราฟนี้

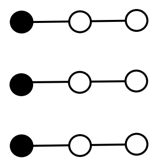
เนื่องจากการลบจุดที่เล่นไม่ได้แล้วออกจากไปจากกราฟไม่มีผลต่อการเล่นเกม จำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟตกค้างและกราฟเดิมจึงเท่ากัน จากนี้ไป เมื่อเราพิจารณากราฟที่บางจุดถูกครอบคลุมไปแล้ว เราอาจจะพิจารณากราฟตกค้างของมันแทนได้

ตัวอย่าง ให้ H เป็นกราฟที่บางจุดถูกครอบคลุมไปแล้วดังรูป



ภาพที่ 4 : กราฟ H

จะได้ว่าจุด a เป็นจุดยอดเดียวที่เล่นไม่ได้แล้ว (จุดที่เลือกแล้วไม่ครอบคลุมจุดใหม่เพิ่ม) เมื่อลบ a และทุกเส้นที่เชื่อมกับ a ออกจะได้กราฟตกค้างของ H ดังนี้



ภาพที่ 5 : กราฟตกค้างของ H

บทนิยาม 2.6 กราฟหลายส่วนบริบูรณ์ (complete multipartite graph) คือ กราฟที่สามารถแบ่งจุดยอดออกเป็นกลุ่ม ๆ โดยที่สองจุดใด ๆ ที่อยู่ต่างกลุ่มกันมีเส้นเชื่อมกันและสองจุดใด ๆ ในกลุ่มเดียวกันไม่มีเส้นเชื่อมกัน ให้ $K_{m_1, m_2, ..., m_k}$ แทนกราฟหลายส่วนบริบูรณ์ที่มีจุดยอด k กลุ่ม โดยแต่ละกลุ่มมีจำนวนจุดยอดอยู่ $m_1, m_2, ..., m_k$ จุดตามลำดับ เมื่อ $k = 2$ เราจะเรียกกราฟนี้ว่า**กราฟสองส่วนบริบูรณ์ (complete bipartite graph)**

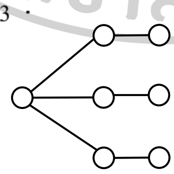
บทนิยาม 2.7 กราฟดาว S_k (star graph) คือ กราฟสองส่วนบริบูรณ์ $K_{1,k}$ โดยที่ $k \geq 3$ นั่นคือ กราฟที่มีจุดศูนย์กลางหนึ่งจุดประชิดกับจุดยอดดีกรีหนึ่งจำนวน k จุด

หมายเหตุ ในนิยามข้างเราต้นกำหนดให้ $k \geq 3$ เนื่องจากไม่ต้องการนับกราฟวิถีว่าเป็นกราฟดาว

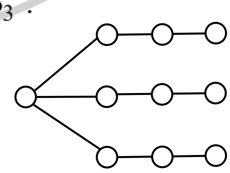
บทนิยาม 2.8 กราฟดาวขยาย S_k^n (extended star graph) คือ กราฟดาวที่มีจุดศูนย์กลางประชิดกับกับปลายข้างหนึ่งของวิถี P_n จำนวน k วิถี โดยที่ $n \geq 2$ แล $k \geq 3$

ตัวอย่าง

S_3^2 :



S_3^3 :



ภาพที่ 6 : กราฟ S_3^2 และ กราฟ S_3^3

บทนิยาม 2.9 กราฟป่า (forest) คือ กราฟที่ไม่มีวัฏจักร ถ้าหากกราฟที่ไม่มีวัฏจักรเป็นกราฟเชื่อมโยงด้วย เราจะเรียกกราฟนี้ว่าเป็น**กราฟต้นไม้ (tree)**

ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีบท 2.1 [7, Lemma 2.1] (Continuation Principle)

ให้ G เป็นกราฟ และ $A, B \subseteq V(G)$ ถ้า $B \subseteq A$ แล้ว $\gamma_g(G|A) \le \gamma_g(G|B)$ และ $\gamma'_g(G|A) \le \gamma'_g(G|B)$

ในการพิสูจน์ค่าของเกมโดมิเนชัน เราจะทำการหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของค่า ซึ่งสามารถทำได้โดยการกำหนดแผนของผู้เล่นคนหนึ่ง (อาจไม่ใช่แผนที่ดีที่สุด) ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2 ให้ G เป็นกราฟจะได้ว่า

1.) สำหรับเกมที่ Dominator เริ่มก่อน ถ้า Dominator มีแผนที่ทำให้เกมจบได้ใน k ครั้ง จะได้ว่า $\gamma_g(G) \le k$

2.) สำหรับเกมที่ Staller เริ่มก่อน ถ้า Dominator มีแผนที่ทำให้เกมจบได้ใน k ครั้ง จะได้ว่า $\gamma'_g(G) \le k$

3.) สำหรับเกมที่ Dominator เริ่มก่อน ถ้า Staller มีแผนที่ทำให้เกมจบได้ใน k ครั้ง จะได้ว่า $\gamma_g(G) \ge k$

4.) สำหรับเกมที่ Staller เริ่มก่อน ถ้า Staller มีแผนที่ทำให้เกมจบได้ใน k ครั้ง จะได้ว่า $\gamma'_g(G) \ge k$

ทฤษฎีบท 2.3 [8] ถ้า P_n เป็นกราฟวิถีที่มีจุดยอด n จุด แล้วจะได้ว่า

$$\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil, \qquad \gamma_g(P_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1; & n \equiv 3 \pmod 4 \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil; & \text{ในกรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

และ $\gamma'_g(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

ทฤษฎีบท 2.4 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ที่ $n \equiv 0 \pmod{3}$ หรือ $n \equiv 1 \pmod{3}$ จะได้ว่า

$$\gamma(P_{n-1}) = \gamma(P_{n-2}) = \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil$$

__พิสูจน์__ จาก ทฤษฎีบท 2.3 จะได้ $\gamma(P_{n-1}) = \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil$ และ $\gamma(P_{n-2}) = \left\lceil \frac{n-2}{3} \right\rceil$

เนื่องจาก $n \equiv 0 \pmod{3}$ หรือ $n \equiv 1 \pmod{3}$ จะได้ว่า $\left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-2}{3} \right\rceil$

ดังนั้น $\gamma(P_{n-1}) = \gamma(P_{n-2}) = \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil$

■

ให้ P_n แทนกราฟวิถีที่มีจุด n จุด ให้ P_n' แทนกราฟวิถี P_{n+1} ที่จุดปลายด้านหนึ่งถูกครอบคลุม และ P_n'' แทนกราฟวิถี P_{n+2} ที่จุดปลายทั้งสองข้างถูกครอบคลุม เราจะกล่าวว่า P_n' หรือ P_n'' จะอยู่ในคลาส $[i]^*$ ถ้า $n \equiv i \bmod 4$

ทฤษฎีบท 2.5 [9] สำหรับกราฟ $G = P'_{m_1} + \cdots + P'_{m_r} + P''_{s_1} + \cdots + P''_{s_l}$

ให้ a แล b แทนจำนวนคอมโพแนนท์ของ G ที่อยู่ในคลาส $[2]^*$ และ $[3]^*$ ตามลำดับ

ให้ $\theta = \left\lceil \frac{m_1}{2} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{m_r}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{s_1}{2} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{s_l}{2} \right\rceil$ จะได้ว่า

$$\gamma_g(G) = \theta + \left\lceil \frac{a-1}{2} + \frac{b}{4} \right\rceil - \left\lceil \frac{b}{2} \right\rceil \text{ และ } \gamma_g'(G) = \theta + \left\lceil \frac{a-1}{2} + \frac{b+1}{4} \right\rceil - \left\lceil \frac{b-1}{2} \right\rceil$$

ทฤษฎีบท 2.6 $[2,7]$ ให้ G เป็นกราฟจะได้ว่า $\left|\gamma_g(G) - \gamma'_g(G)\right| \leq 1$

สำหรับกราฟ G หากเราต้องการแสดงว่า $\gamma_g(G) = a$ และ $\gamma_g'(G) = a+1$

โดยทฤษฎีบท 2.6 มันเป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า $\gamma_g(G) \leq a$ และ $\gamma'_g(G) \geq a+1$

ทฤษฎีบท 2.7 [7, Theorem 4.6] ให้ F เป็นกราฟป่า จะได้ว่า $\gamma_g(F) \le \gamma'_g(F)$

สำหรับกราฟป่า F หากเราต้องการแสดงว่า $\gamma_g(F) = \gamma'_g(F) = a$
โดยทฤษฎีบท 2.7 มันเป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า $\gamma_g(F) \ge a$ และ $\gamma'_g(F) \le a$

ทฤษฎีบท 2.8 สำหรับกราฟ G ใด ๆ จะได้ว่า

$$\gamma_g(G+2P_1) = \gamma_g(G)+2 \text{ และ } \gamma'_g(G+2P_1) = \gamma'_g(G)+2$$

<u>**พิสูจน์**</u> พิจารณาแผนการเล่นของ Dominator บน $G+2P_1$ ให้ Dominator เล่นให้ดีที่สุดบน G ยกเว้นเมื่อ Staller ไปเล่นจุดอิสระ ให้ Dominator เล่นจุดอิสระอีกจุด จะได้ว่า $\gamma_g(G+2P_1) \le \gamma_g(G)+2$

พิจารณาแผนการเล่นของ Staller บน $G+2P_1$ ให้ Staller เล่นให้ดีที่สุดบน G ยกเว้นเมื่อ Dominator ไปเล่นจุดอิสระ ให้ Staller เล่นจุดอิสระอีกจุด จะได้ว่า $\gamma_g(G+2P_1) \ge \gamma_g(G)+2$

ดังนั้น $\gamma_g(G+2P_1) = \gamma_g(G)+2$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถแสดงได้ว่า $\gamma'_g(G+2P_1) = \gamma'_g(G)+2$

■

บทที่ 3

จำนวนโดมิเนชันและจำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟหลายส่วนบริบูรณ์

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงการศึกษากราฟหลายส่วนบริบูรณ์และหาจำนวนโดมิเนชันและจำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟตระกูลนี้

3.1 จำนวนโดมิเนชันของกราฟหลายส่วนบริบูรณ์

ทฤษฎีบทที่ 3.1 ให้ $G = K_{m_1,m_2,m_3,\ldots,m_k}$ เป็นกราฟหลายส่วนบริบูรณ์จะได้ว่า

$$\gamma(G) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \min\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} = 1 \\ 2 & \text{ในกรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

<u>**พิสูจน์**</u>

กรณีที่ 1 $\min\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} = 1$

โดยไม่เสียนัยสำคัญให้ $m_1 = 1$ และ v เป็นจุดในกลุ่มที่มีขนาด 1 นี้ จะได้ว่า v มีเส้นเชื่อมไปยังจุดยอดในกลุ่มอื่น ๆ ทั้งหมดบน G ดังนั้น $\{v\}$ เป็นเซตครอบคลุม จะได้ว่า $\gamma(G) = 1$

กรณีที่ 2 $\min\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} \neq 1$

จะได้ว่าไม่มีจุดยอดใดที่ประชิดกับจุดอื่นทุกจุดบน G ดังนั้น $\gamma(G) > 1$ ให้ u เป็นจุดในกลุ่มแรก (กลุ่มขนาด m_1) และให้ v เป็นจุดในกลุ่มอื่น จะได้ว่า $\{u, v\}$ เป็นเซตครอบคลุม ดังนั้น $\gamma(G) = 2$

■

3.2 จำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟหลายส่วนบริบูรณ์

ทฤษฎีบทที่ 3.2 ให้ $G = K_{m_1,m_2,m_3,\ldots,m_k}$ เป็นกราฟหลายส่วนบริบูรณ์จะได้ว่า

$$\gamma_g(G) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \min\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} = 1 \\ 2 & \text{เมื่อ } \min\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} = 2 \\ 3 & \text{ในกรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

และ

$$\gamma'_g(G) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \max\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} = 1 \\ 2 & \text{ในกรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

พิสูจน์ ก่อนอื่นเราพิจารณาเกมที่ Dominator เป็นผู้เริ่มเล่น

กรณีที่ 1 $\min\{m_1, m_2, ..., m_k\} = 1$

โดยไม่เสียนัยสำคัญให้ $m_1 = 1$ และ v เป็นจุดในกลุ่มที่มีขนาด 1 นี้ จะได้ว่า v มีเส้นเชื่อมไปยังจุดยอดในกลุ่มอื่น ๆ ทั้งหมดบน G ดังนั้น Dominator สามารถเริ่มเล่นที่ v เพื่อจบเกมได้ทันทีจะได้ว่า $\gamma_g(G) = 1$

กรณีที่ 2 $\min\{m_1, m_2, ..., m_k\} = 2$

จะได้ว่าไม่มีจุดยอดใดที่เลือกแล้วจะทำให้ทุกจุดบน G ถูกครอบคลุมได้ ดังนั้น $\gamma_g(G) > 1$ สมมติ v_1, v_2 เป็นจุดยอดในกลุ่มของจุดยอดที่มีสมาชิก 2 จุด จะได้ว่า v_1 มีเส้นเชื่อมไปยังจุดยอดในส่วนอื่น ๆ ทั้งหมดบน G ยกเว้น v_2 ที่อยู่ในส่วนเดียวกัน พิจารณาแผนของ Dominator ให้ Dominator เริ่มเล่นที่ v_1 จะบังคับให้ ในการเล่นถัดไป Staller ต้องจบเกมนั่นคือ $\gamma_g(G) \le 2$ จึงสรุปได้ว่า $\gamma_g(G) = 2$

กรณีที่ 3 $\min\{m_1, m_2, ..., m_k\} > 2$

ให้ v เป็นจุดที่ Dominator เริ่มเล่น พิจารณาแผนการเล่นของ Staller ให้ Staller เลือกจุดที่อยู่ในกลุ่มเดียวกับ v จะทำให้เหลืออย่างน้อยหนึ่งจุดที่อยู่ในกลุ่มเดียวกับ v ยังไม่ถูกครอบคลุม ดังนั้น $\gamma_g(G) \ge 3$ พิจารณาแผนการเล่นของ Dominator หากการโต้กลับ Staller ยังไม่เป็นการจบเกม Dominator จะสามารถจบเกมได้โดยเลือกจุดที่ไม่อยู่ในกลุ่มเดียวกับ v นั่นคือ $\gamma_g(G) \le 3$ จึงสรุปได้ว่า $\gamma_g(G) = 3$

ถัดมาเราพิจารณาเกมที่ Staller เป็นผู้เริ่มเล่น

กรณีที่ 1 $\max\{m_1, m_2, ..., m_k\} = 1$

เห็นได้ชัดว่า ไม่ว่า Staller จะเลือกจุดยอดใด ๆ บน $K_{m_1,m_2,m_3,...,m_k}$ จุดยอดทุกจุดจะถูกครอบคลุม ดังนั้น $\gamma'_g(K_{m_1,m_2,m_3,...,m_k}) = 1$

กรณีที่ 2 $\max\{m_1, m_2, ..., m_k\} \ne 1$

โดยไม่เสียนัยสำคัญให้ $m_1 > 1$ พิจารณาแผนการเล่นของ Staller ดังนี้ Staller จะสามารถเลือกจุดที่ไม่เป็นการจบเกมได้คือเลือกจุดยอดจากกลุ่มแรก (กลุ่มขนาด m_1) จะได้ว่า $\gamma'_g(K_{m_1,m_2,...,m_k}) \ge 2$ พิจารณาแผนการเล่นของ Dominator ดังนี้ หาก Staller เลือกจุดยอดใด ๆ บน $K_{m_1,m_2,...,m_k}$ แล้วยังไม่เป็นการจบเกม Dominator สามารถเลือกจุดยอดที่ไม่อยู่ในกลุ่มเดียวกับจุดยอดที่ Staller เลือกเพื่อจบเกมได้นั่นคือ $\gamma'_g(K_{m_1,m_2,...,m_k}) \le 2$ ดังนั้น $\gamma'_g(K_{m_1,m_2,...,m_k}) = 2$

■

บทที่ 4

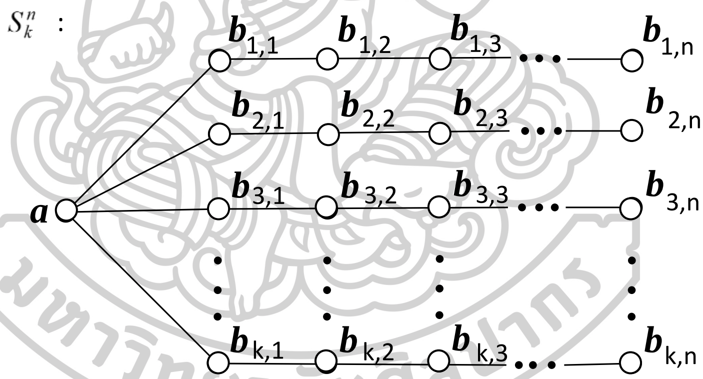
จำนวนโดมิเนชันและจำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟกราฟดาวขยาย

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงการศึกษากราฟดาวขยายเพื่อหาจำนวนโดมิเนชันและจำนวนเกมโดมิเนชัน และเพื่อให้สะดวกต่อการศึกษาจำนวนโดมิเนชันและกลยุทธ์การเล่นเกมโดมิเนชันจึงกำหนดสัญลักษณ์แทนจุด และเซตของจุดบนกราฟดาวขยายดังนี้

พิจารณากราฟ S_k^n ที่ $n \geq 2, k \geq 3$

ให้ a เป็นจุดยอดดีกรี n ที่เป็นจุดศูนย์กลางของ S_k^n

ให้ $b_{i,j}$ โดยที่ $i \in \{1,2,3,\ldots,k\}$, $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ แทนจุดยอดใน P_n จำนวน k วิถี ที่ประชิดกับจุดยอด a ดังรูป



ภาพที่ 7 : จุดยอดของ S_k^n

กำหนดให้ d_n แทนจุดที่ถูกเลือกในการเล่นครั้งที่ n ของ Dominator

s_n แทนจุดที่ถูกเลือกในการเล่นครั้งที่ n ของ Staller

โดย ○ แทนจุดที่ยังไม่ถูกครอบคลุม และ ● แทนจุดที่ถูกครอบคลุมแล้ว

และ $N[a]$ แทนเซตของจุดยอด a และจุดยอดทุกจุดที่มีเส้นเชื่อมกับจุดยอด a

ข้อสังเกต สำหรับจำนวนเต็มบวก n,k ที่ $k < 3$ จะได้ว่า S_k^n มีลักษณะเป็นกราฟวิถี P_{kn+1} ซึ่งเราจะไม่พิจารณาเป็นกราฟดาวขยาย

4.1 จำนวนโดมิเนชันของกราฟดาวขยาย

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงการศึกษากราฟดาวขยายเพื่อหาสูตรในการคำนวณหาค่าของจำนวนโดมิเนชันของกราฟดาวขยาย

ทฤษฎีบท 4.1 สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 2, k \geq 3$ จะได้ว่า

$$\gamma(S_k^n) = \begin{cases} k\left(\dfrac{n+1}{3}\right) & \text{เมื่อ } n \equiv 2 \pmod 3 \\ k\left\lceil \dfrac{n-1}{3} \right\rceil + 1 & \text{ในกรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

<u>พิสูจน์</u>

กรณีที่ 1 $n \equiv 2 \pmod 3$

พิจารณาในส่วนที่ไม่ใช่ $N[a]$ จะได้ว่ามีลักษณะเป็น P_{n-1} จำนวน k วิถี โดยทฤษฎีบท 2.3 แต่ละวิถีต้องใช้จุดอย่างน้อย $\left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil = \frac{n+1}{3}$ จุดเพื่อครอบคลุมวิถีนั้น (บางจุดอาจอยู่นอกวิถี) และเนื่องจากไม่มีจุดใดที่ครอบคลุมจุดในวิถีเหล่านี้ได้มากกว่าหนึ่งวิถี ดังนั้น $\gamma(S_k^n) \geq k\left(\frac{n+1}{3}\right)$

ให้ $S = \left\{ b_{i,j} \mid i \in \{1,2,3,\ldots,k\}, j \in \{1,4,7,\ldots,n-1\} \right\}$ จะได้ว่า $n(S) = k\left(\frac{n+1}{3}\right)$ และสังเกตได้ว่า S เป็นเซตครอบคลุม ดังนั้น $\gamma(S_k^n) = k\left(\frac{n+1}{3}\right)$

กรณีที่ 2 $n \equiv 0 \pmod 3$ **หรือ** $n \equiv 1 \pmod 3$

พิจารณาในส่วนที่ไม่ใช่ $N[a]$ จะได้ว่ามีลักษณะเป็น P_{n-1} จำนวน k วิถี โดยทฤษฎีบท 2.3 แต่ละวิถีต้องใช้จุด $\left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil$ จุดเพื่อครอบคลุมวิถีนั้น โดยทฤษฎีบท 2.4 จะได้ว่าแต่ละ $\left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil$ จุดในแต่ละวิถีนี้จะต้องอยู่ภายในวิถี P_{n-1} นั้น ๆ จึงไม่สามารถครอบคลุม a ได้ จึงต้องใช้อีกหนึ่งจุดเพื่อครอบคลุมจุด a ดังนั้น $\gamma(S_k^n) \geq k\left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil + 1$ ให้ $T = \left\{ b_{i,j} \mid i \in \{1,2,3,\ldots,k\}, j \in \left\{3,6,9,\ldots,3\left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil\right\} \right\}$ จะได้ว่า $n(T) = k\left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil$ และสังเกตได้ว่า $\{a\} \cup T$ เป็นเซตครอบคลุม ดังนั้น $\gamma(S_k^n) = k\left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil + 1$

■

4.2 จำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟดาวขยาย S_k^2 และ S_k^3

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงการศึกษากลยุทธ์การเล่นเกมโดมิเนชันบนกราฟดาวขยายเพื่อหาสูตรในการคำนวณหาค่าของจำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟดาวขยาย S_k^2 และ S_k^3 เครื่องมือหลักในการพิสูจน์สูตรคือทฤษฎีบท 2.2 เราจะทำการพิสูจน์ขอบเขตบนของจำนวนเกมโดมิเนชันโดยการแสดงว่า Dominator มีแผนที่สามารถจบเกมได้ภายในค่าขอบเขตบน และเราจะทำการพิสูจน์ขอบเขตล่างโดยการแสดงว่า Staller มีแผนที่สามารถยื้อเกมออกไปได้อย่างน้อยค่าขอบเขตล่าง นอกจากนี้ในการระบุแผนการเล่นนั้น เราอาจจะระบุแผน เพียงบางขั้นตอน หากขั้นตอนใดไม่ได้ระบุ ให้นับว่าผู้เล่นเล่นด้วยกลยุทธที่ดีที่สุด

ทฤษฎีบท 4.2.1 สำหรับจำนวนเต็ม $k \geq 3$ จะได้ว่า $\gamma_g(S_k^2) = \gamma'_g(S_k^2) = k+1$

<u>**พิสูจน์**</u> โดยทฤษฎีบท 2.7 เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า $\gamma_g\left(S_k^2\right) \geq k+1$ และ $\gamma'_g\left(S_k^2\right) \leq k+1$

ก่อนอื่นเราจะแสดงว่า $\gamma_g(S_k^2) \geq k+1$

พิจารณาแผนการเล่นของ Staller แบ่งกรณีตามการเริ่มเล่นของ Dominator ดังนี้

กรณีที่ 1 $d_1 = a$

จะได้กราฟตกค้างของ $G|N[a]$ คือ kP_1' ฉะนั้น จำนวนครั้งในการเล่นจนจบเกมมีค่าอย่างน้อย $1+\gamma'_g(kP_1') = 1+k$

กรณีที่ 2 $d_1 \neq a$

โดยไม่เสียนัยทั่วไปและโดยทฤษฎีบท 2.1 สมมติให้ Dominator เริ่มที่ $b_{1,1}$ พิจารณาแผนการเล่นของ Staller โดยโต้กลับที่จุด a จะได้จำนวนครั้งในการเล่นจนจบเกมมีค่าอย่างน้อย $2+\gamma_g((k-1)P_1') = 2+(k-1) = k+1$

จากทั้งสองกรณีพบว่าแผนของ Staller นี้ทำให้ต้องเล่นอย่างน้อย $k+1$ ครั้ง ดังนั้น $\gamma_g(S_k^2) \geq k+1$

ถัดมาจะแสดงว่า $\gamma'_g(S_k^2) \leq k+1$

พิจารณาแผนการเล่นของ Dominator แบ่งกรณีตามการเริ่มเล่นของ Staller ดังนี้

กรณีที่ 1 $s_1 = a$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่นอย่างมาก $1+\gamma_g(kP_1') = 1+k$ ครั้ง

กรณีที่ 2 $s_1 \neq a$

โดยไม่เสียนัยทั่วไปและโดยทฤษฎีบท 2.1 สมติให้ Staller เริ่มที่ $b_{1,2}$ พิจารณาแผนการเล่นของ Dominator โดยโต้กลับที่จุด a จะได้จำนวนครั้งในการเล่นอย่างมาก $2+\gamma_g'((k-1)P_1') = 2+(k-1) = k+1$

จากทั้งสองกรณีพบว่า Dominator สามารถทำให้เกมจบภายใน $k+1$ ครั้งได้เสมอ ดังนั้น $\gamma_g(S_k^2) \geq k+1$

■

ถัดมาเราพิสูจน์ผลลัพธ์ที่จะใช้ช่วยหาจำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟดาวขยาย S_k^3

<u>บทตั้ง 4.2.2</u> สำหรับจำนวนเต็ม $k \geq 3$ จะได้ว่า

$$\gamma_g(S_k^3|a) \leq \begin{cases} \dfrac{3k}{2} & \text{เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \dfrac{3k+1}{2} & \text{เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

$$\gamma_g'(S_k^3|a) \leq \begin{cases} \dfrac{3k}{2}+1 & \text{เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \dfrac{3k+1}{2} & \text{เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

<u>พิสูจน์</u> จะแสดงการพิสูจน์โดยอุปนัยบน k

ขั้นฐาน เราสามารถตรวจสอบได้โดยไม่ยากว่า $\gamma_g(S_3^3|a) = \gamma_g'(S_3^3|a) = 5$, $\gamma_g(S_4^3|a) = 6$ และ $\gamma_g'(S_4^3|a) = 7$

ขั้นอุปนัย สมมติให้ บทตั้ง 4.2.2 เป็นจริงสำหรับ $S_t^3|a$ เมื่อ $t \leq k$ จะแสดงว่า บทตั้ง 4.2.2 เป็นจริงสำหรับ $S_{k+1}^3|a$

กรณี k เป็นจำนวนคู่

ก่อนอื่นจะแสดงว่า $\gamma_g\left(S_{k+1}^3|a\right) \leq \dfrac{3(k+1)+1}{2}$

พิจารณาแผนการเล่นของ Dominator โดยให้ $d_1 = b_{1,2}$ จะได้ว่ากราฟตกค้างหลังจากเล่น d_1 คือ $S_k^3|a$ ดังนั้นจำนวนครั้งที่การเล่นเกมบน $S_{k+1}^3|a$ จะไม่เกิน $1+\gamma_g'(S_k^3|a_2)$ ซึ่งโดยสมมติฐานการอุปนัย

จะมีค่าไม่เกิน $1+\dfrac{3k}{2}+1=\dfrac{3(k+1)+1}{2}$

ถัดมาจะแสดงว่า $\gamma_g'\left(S_{k+1}^3|a\right) \le \dfrac{3(k+1)+1}{2}$ จากทฤษฎีบท 2.1 โดยไม่เสียนัยทั่วไป ให้ $s_1 \in \left\{a, b_{1,3}, b_{1,1}\right\}$ พิจารณาแผนการเล่นของ Dominator ตามการเริ่มเล่นของ Staller ดังนี้

กรณีที่ 1 $s_1 = a$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $=1+\gamma_g((k+1)P_2')$

$$=1+(k+1)\left\lceil\frac{2}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil \quad \text{จากทฤษฎีบท 2.5}$$

$$=1+(k+1)+\frac{k}{2}$$

$$=\frac{3(k+1)+1}{2}$$

กรณีที่ 2 $s_1 = b_{1,3}$ ให้ $d_1 = a$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $=2+\gamma_g'(kP_2')$

$$=2+k\left\lceil\frac{2}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{k-1}{2}+\frac{1}{4}\right\rceil \quad \text{จากทฤษฎีบท 2.5}$$

$$=2+k+\frac{k}{2}$$

$$=\frac{3(k+1)+1}{2}$$

กรณีที่ 3 $s_1 = b_{1,1}$ ให้ $d_1 = b_{2,2}$

จากทฤษฎีบท 2.1 โดยไม่เสียนัยทั่วไป ให้ $s_2 \in \left\{a, b_{1,3}, b_{3,1}, b_{3,3}\right\}$

กรณีที่ 3.1 $s_2 = a$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $=3+\gamma_g(P_1'+(k-1)P_2')$

$$=3+1+(k-1)\left\lceil\frac{2}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{k-2}{2}\right\rceil \quad \text{จากทฤษฎีบท 2.5}$$

$$= 3 + k + \frac{k}{2} - 1$$

$$= \frac{3(k+1)+1}{2}$$

กรณีที่ 3.2 $s_2 = b_{1,3}$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 3 + \gamma_g(S_{k-1}^3 | a)$

$$\le 3 + \frac{3(k-1)+1}{2}$$ สมมติฐานการอุปนัย

$$= \frac{3(k+1)+1}{2}$$

กรณีที่ 3.3 $s_2 = b_{3,1}$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 3 + \gamma_g(2P_1' + S_{k-2}^3 | a)$

$$= 3 + 2 + \gamma_g(S_{k-2}^3 | a)$$ จากทฤษฎีบท 2.8

$$\le 3 + 2 + \frac{3(k-2)}{2}$$ สมมติฐานการอุปนัย

$$= \frac{3(k+1)+1}{2}$$

กรณีที่ 3.4 $s_2 = b_{3,3}$ ให้ $d_2 = a$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 4 + \gamma_g'(P_1' + (k-2)P_2')$

$$= 4 + 1 + (k-2)\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k-3}{2} \right\rceil$$ จากทฤษฎีบท 2.5

$$= 4 + 1 + (k-2) + \frac{k}{2} - 1$$

$$= \frac{3(k+1)+1}{2}$$

กรณี k เป็นจำนวนคี่

ก่อนอื่นจะแสดงว่า $\gamma_g\left(S_{k+1}^3|a\right) \le \frac{3(k+1)}{2}$

พิจารณาแผนการเล่นของ Dominator โดยให้ $d_1 = b_{1,2}$

จะได้ว่า $\gamma_g\left(S_{k+1}^3|a\right) \le 1+\gamma'_g(S_k^3|a_2)$

$\le 1+\frac{3k+1}{2}$ สมมติฐานการอุปนัย

$= \frac{3(k+1)}{2}$

สุดท้ายจะแสดงว่า $\gamma'_g\left(S_{k+1}^3|a\right) \le \frac{3(k+1)}{2}+1$

จากทฤษฎีบท 2.1 โดยไม่เสียนัยทั่วไป ให้ $s_1 \in \{a, b_{1,3}, b_{1,1}\}$ พิจารณาแผนการเล่นของ Dominator ตามการเริ่มเล่นของ Staller ดังนี้

กรณีที่ 1 $s_1 = a$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 1+\gamma_g((k+1)P'_2)$

$= 1+(k+1)\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ จากทฤษฎีบท 2.5

$= 1+(k+1)+\frac{k+1}{2} = \frac{3(k+1)}{2}+1$

กรณีที่ 2 $s_1 = b_{1,3}$ ให้ $d_1 = a$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 2+\gamma'_g(kP'_2)$

$= 2+k\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k-1}{2}+\frac{1}{4} \right\rceil$ จากทฤษฎีบท 2.5

$= 2+k+\frac{k-1}{2}+1$

$= \frac{3(k+1)}{2}+1$

กรณีที่ 3 $s_1 = b_{1,1}$ ให้ $d_1 = b_{2,2}$

จากทฤษฎีบท 2.1 โดยไม่เสียนัยทั่วไป ให้ $s_2 \in \{a, b_{1,3}, b_{3,1}, b_{3,3}\}$

กรณีที่ 3.1 $s_2 = a$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 3 + \gamma_g(P_1' + (k-1)P_2')$

$= 3 + 1 + (k-1)\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k-2}{2} \right\rceil$ จากทฤษฎีบท 2.5

$= 3 + k + \frac{k-1}{2}$

$= \frac{3(k+1)}{2} + 1$

กรณีที่ 3.2 $s_2 = b_{1,3}$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 3 + \gamma_g(S_{k-1}^3 | a)$

$\leq 3 + \frac{3(k-1)}{2}$ สมมติฐานการอุปนัย

$= \frac{3(k+1)}{2}$

$\leq \frac{3(k+1)}{2} + 1$

กรณีที่ 3.3 $s_2 = b_{3,1}$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 3 + \gamma_g(2P_1' + S_{k-2}^3 | a)$

$= 3 + 2 + \gamma_g(S_{k-2}^3 | a)$ จากทฤษฎีบท 2.8

$\leq 3 + 2 + \frac{3(k-2)+1}{2}$ สมมติฐานการอุปนัย

$= \frac{3(k+1)}{2} + 1$

กรณีที่ 3.4 $s_2 = b_{3,3}$ ให้ $d_2 = a$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 4+\gamma'_g(P'_1+(k-2)P'_2)$

$$= 4+1+(k-2)\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k-3}{2}+\frac{1}{4} \right\rceil \quad \text{จากทฤษฎีบท 2.5}$$

$$= 4+1+(k-2)+\frac{k-3}{2}+1$$

$$= \frac{3(k+1)}{2}+1$$

โดยหลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์จะได้ว่า $\gamma_g(S_k^3|a) \le \frac{3k}{2}$ และ $\gamma'_g(S_k^3|a) \le \frac{3k}{2}+1$ เมื่อ k เป็นจำนวนคู่

และได้ว่า $\gamma_g(S_k^3|a) \le \frac{3k+1}{2}$ และ $\gamma'_g(S_k^3|a) \le \frac{3k+1}{2}$ เมื่อ k เป็นจำนวนคี่

■

ทฤษฎีบท 4.2.3 สำหรับจำนวนเต็ม $k \ge 3$ จะได้ว่า $\gamma_g(S_k^3) = \gamma'_g(S_k^3) = \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$

<u>พิสูจน์</u> โดยทฤษฎีบท 2.7 เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า $\gamma_g(S_k^3) \ge \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$ และ $\gamma'_g(S_k^3) \le \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$

ก่อนอื่นเราจะแสดงว่า $\gamma_g(S_k^3) \ge \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$

พิจารณาแผนของ Staller แบ่งกรณีตามการเริ่มเล่นของ Dominator จากทฤษฎีบท 2.1 โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติได้ว่า Dominator เริ่มที่ a , $b_{1,1}$ หรือ $b_{1,2}$

กรณีที่ 1 $d_1 = a$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 1+\gamma'_g(kP'_2)$

$$= 1+k\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k-1}{2}+\frac{1}{4} \right\rceil \quad \text{จากทฤษฎีบท 2.5}$$

$$= \left\lceil \frac{3k+1}{2}+\frac{1}{4} \right\rceil$$

$$\ge \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$$

กรณีที่ 2 $d_1 = b_{1,1}$ ให้ $s_1 = a$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 2 + \gamma_g(P_1' + (k-1)P_2')$

$$= 2 + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + (k-1)\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k-2}{2} \right\rceil \quad \text{จากทฤษฎีบท 2.5}$$

$$= \left\lceil \frac{3k+2}{2} \right\rceil$$

$$\geq \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$$

กรณีที่ 3 $d_1 = b_{1,2}$ ให้ $s_1 = b_{1,1}$ แล้วพิจารณาแผนการเล่นของ Staller แบ่งกรณีตามการเล่นครั้งที่ 2 ของ Dominator ดังนี้

กรณีที่ 3.1 $d_2 = a$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 3 + \gamma_g'((k-1)P_2')$

$$= 3 + (k-1)\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k-2}{2} + \frac{1}{4} \right\rceil \quad \text{จากทฤษฎีบท 2.5}$$

$$= \left\lceil \frac{3k+2}{2} + \frac{1}{4} \right\rceil$$

$$\geq \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$$

กรณีที่ 3.2 $d_2 \neq a$

จากทฤษฎีบท 2.1 โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้ Dominator เล่นครั้งที่ 2 ที่ $b_{2,2}$ พิจารณาแผนการเล่นของ Staller โดยการเล่นครั้งที่ 2 ของ Staller โดยโต้กลับที่จุด a

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 4 + \gamma_g((k-2)P_2')$

$$= 4 + (k-2)\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k-3}{2} \right\rceil \quad \text{จากทฤษฎีบท 2.5}$$

$$= \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$$

จากทุกกรณี จึงสรุปได้ว่า $\gamma_g(S_k^3) \geq \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$

ถัดไปจะแสดงว่า $\gamma'_g(S_k^3) \leq \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$ โดยแบ่งพิจารณา k เป็นจำนวนคู่และ k เป็นจำนวนคี่

ให้ k เป็นจำนวนคู่

โดยไม่เสียนัยทั่วไปและโดยทฤษฎีบท 2.1 ให้ $s_1 \in \{a, b_{1,3}, b_{1,1}\}$ พิจารณาแผนการเล่นของ Dominator แบ่งกรณีตามการเริ่มเล่นของ Staller ดังนี้

กรณีที่ 1 $s_1 = a$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 1 + \gamma_g(kP_2')$

$= 1 + k\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil$ จากทฤษฎีบท 2.5

$= \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$

กรณีที่ 2 $s_1 = b_{1,3}$ ให้ $d_1 = a$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 2 + \gamma'_g((k-1)P_2')$

$= 2 + (k-1)\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k-2}{2} + \frac{1}{4} \right\rceil$ จากทฤษฎีบท 2.5

$= \left\lceil \frac{3k}{2} + \frac{1}{4} \right\rceil$

$= \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$

กรณีที่ 3 $s_1 = b_{1,1}$ ให้ $d_1 = b_{2,2}$

โดยไม่เสียนัยทั่วไปและโดยทฤษฎีบท 2.1 ให้ $s_2 \in \{a, b_{1,3}, b_{3,3}, b_{3,1}\}$

กรณีที่ 3.1 $s_2 = a$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 3+\gamma_g(P_1' + (k-2)P_2')$

$= 3+\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + (k-2)\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k-3}{2} \right\rceil$ จากทฤษฎีบท 2.5

$= \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$

กรณีที่ 3.2 $s_2 = b_{1,3}$ ให้ $d_2 = a$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 4+\gamma_g'((k-2)P_2')$

$= 4+(k-2)\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k-3}{2} + \frac{1}{4} \right\rceil$ จากทฤษฎีบท 2.5

$= \left\lceil \frac{3k+1}{2} + \frac{1}{4} \right\rceil$

$= \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$ จาก k เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 3.3 $s_2 = b_{3,3}$ ให้ $d_2 = a$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 4+\gamma_g'(P_1' + (k-3)P_2')$

$= 4+\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + (k-3)\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k-4}{2} + \frac{1}{4} \right\rceil$ จากทฤษฎีบท 2.5

$= \left\lceil \frac{3k}{2} + \frac{1}{4} \right\rceil$

$= \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$

กรณีที่ 3.4 $s_2 = b_{3,1}$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 3+\gamma_g(2P_1' + (S_{k-3}^3|a))$

$= 3+2+\gamma_g(S_{k-3}^3|a)$ จากทฤษฎีบท 2.8

$\le 5+\frac{3(k-3)+1}{2} = \frac{3k+2}{2}$ จากบทตั้ง 4.2.2

$= \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$

จากทุกกรณี จึงสรุปได้ว่า $\gamma_g'(S_k^3) \le \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$ เมื่อ k เป็นจำนวนคู่

ถัดไปให้ k เป็นจำนวนคี่

โดยไม่เสียนัยทั่วไปและโดยทฤษฎีบท 2.1 ให้ $s_1 \in \{a, b_{1,3}, b_{1,1}\}$ พิจารณาแผนการเล่นของ Dominator แบ่งกรณีตามการเริ่มเล่นของ Staller ซึ่งเห็นได้ชัดว่าในกรณีที่ $s_1 = a$ หรือ $s_1 = b_{1,3}$ จะได้จำนวนครั้งในการเล่นเท่ากับที่พิสูจน์ไว้ในกรณี k เป็นจำนวนคู่ จึงพิจารณาเฉพาะกรณีที่ $s_1 = b_{1,1}$ ให้ Dominator โต้กลับที่ $d_1 = b_{2,2}$ โดยไม่เสียนัยทั่วไปและโดยทฤษฎีบท 2.1 ให้ $s_2 \in \{a, b_{1,3}, b_{3,3}, b_{3,1}\}$ แยกเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 $s_2 = a$ หรือ $s_2 = b_{3,3}$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่นเท่ากับที่พิสูจน์ไว้ในกรณี k เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 2 $s_2 = b_{1,3}$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 3+\gamma_g((S_{k-2}^3|a))$

$\le 3+\frac{3(k-2)+1}{2}$ จากบทตั้ง 4.2.2

$= \frac{3k+1}{2}$

$\le \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$

กรณีที่ 3 $s_2 = b_{3,1}$ ให้ $d_2 = b_{4,2}$

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 4 + \gamma'_g(2P'_1 + (S^3_{k-4}|a))$

$= 4 + 2 + \gamma'_g(S^3_{k-4}|a)$ จากทฤษฎีบท 2.8

$\leq 6 + \frac{3(k-4)+1}{2} = \frac{3k+1}{2}$ จากบทตั้ง 4.2.2

$\leq \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$

จากทุกกรณี จึงสรุปได้ว่า $\gamma'_g(S^3_k) \leq \left\lceil \frac{3k+1}{2} \right\rceil$ เมื่อ k เป็นจำนวนคี่

■

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงการศึกษากลยุทธ์การเล่นเกมโดมิเนชันบนกราฟดาวขยายเพื่อหาสูตรในการคำนวณหาค่าของจำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟดาวขยาย S^n_k

4.3 จำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟดาวขยาย S^n_k

ทฤษฎีบท 4.3.1 สำหรับจำนวนนับ $k \geq 3$ และ $n \equiv 1 \pmod 4$ จะได้ว่า

$$\gamma_g(S^n_k) = k\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 \text{ และ } \gamma'_g(S^n_k) = k\left(\frac{n-1}{2}\right) + 2$$

<u>**พิสูจน์**</u> โดยทฤษฎีบท 2.6 เป็นการเพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า $\gamma_g\left(S^n_k\right) \leq k\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1$ และ $\gamma'_g\left(S^n_k\right) \geq k\left(\frac{n-1}{2}\right) + 2$

ก่อนอื่นจะแสดงว่า $\gamma_g\left(S^n_k\right) \leq k\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1$

พิจารณาแผนการเล่นของ Dominator โดยให้ Dominator เริ่มก่อนที่ a

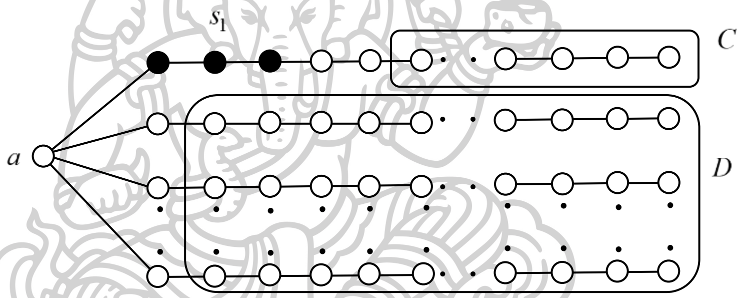
จะได้ว่า $\gamma_g\left(S_k^n\right) \le 1+\gamma'_g\left(kP'_{n-1}\right)$

$$= 1+k\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \qquad \text{จากทฤษฎีบท 2.5}$$

$$= 1+k\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

ถัดมาจะแสดงว่า $\gamma'_g(S_k^n) \ge k\left(\frac{n-1}{2}\right)+2$

ให้ C และ D เป็นเซตของจุดใน S_k^n ดังรูป



ภาพที่ 8 แสดง $S_k^n\big|b_{1,2}$ และส่วน C, D

พิจารณาแผนของ Staller โดยให้ Staller เริ่มก่อนที่ $b_{1,2}$ ดังรูป และในการเล่นครั้งต่อไปพยายามครอบคลุมครั้งละหนึ่งจุดเสมอ พิจารณาในส่วน C จะได้ว่า Staller เล่นครอบคลุมครั้งละ 1 จุด ในส่วนนี้ได้เสมอ และในส่วน C นี้ Dominator จะสามารถเล่นครอบคลุมได้อย่างมากครั้งละ 3 จุด เนื่องจากทั้งสองฝ่ายต้องเล่นสลับกันจึงทำให้ต้องเล่นรวมกันอย่างน้อย $\frac{n-5}{2}$ ครั้ง ในส่วน C

ต่อไปพิจารณาในส่วน D เห็นได้ชัดว่า Staller เล่นครอบคลุมครั้งละ 1 จุด ในส่วนนี้ได้เสมอ และในส่วนนี้ Dominator จะสามารถเล่นครอบคลุมได้อย่างมากครั้งละ 3 จุด เนื่องจากทั้งสองฝ่ายต้องเล่นสลับกันจึงทำให้ต้องเล่นอย่างน้อย $(k-1)\left(\frac{n-1}{2}\right)$ ครั้ง ในส่วน D

รวมการเล่นที่ s_1 และในส่วน C,D เท่ากับ $1+\frac{n-5}{2}+(k-1)\left(\frac{n-1}{2}\right)=k\left(\frac{n-1}{2}\right)-1$ ครั้ง ซึ่งจะครอบคลุมไปอย่างมาก $3+2\left(k\left(\frac{n-1}{2}\right)-2\right)=k(n-1)-1$ จุด จากทั้งหมด $kn+1$ จุด จึงเหลือจุดอีกอย่างน้อย $k+2$ จุดบนกราฟ ที่ยังไม่ได้ถูกครอบคลุมโดยการเล่นดังกล่าวมานี้ ซึ่งจุด $k+2$ จุดนี้ ต้องใช้การเล่นอีกอย่างน้อย 3 ครั้ง เนื่องจากการเล่นที่จุด a ครอบคลุมได้มากที่สุด k จุด และในการครอบคลุมจุดเหล่านี้ Staller สามารถเล่นได้อีกอย่างน้อย 1 ครั้ง จึงได้ผลรวมในการเล่นทั้งหมดอย่างน้อย $k\left(\frac{n-1}{2}\right)-1+3=k\left(\frac{n-1}{2}\right)+2$ ครั้ง นั่นคือ $\gamma_g'(S_k^n)\geq k\left(\frac{n-1}{2}\right)+2$

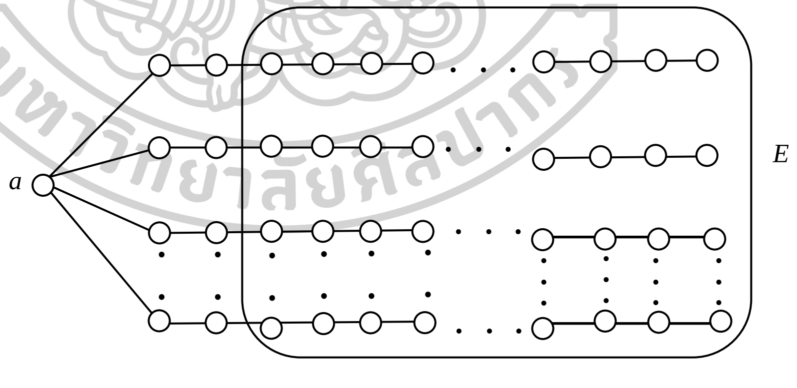
■

ทฤษฎีบท 4.3.2 สำหรับจำนวนนับ $k\geq 3$ และ $n\equiv 2 \pmod 4$ จะได้ว่า

$$\gamma_g(S_k^n)=\gamma_g'(S_k^n)=\frac{kn}{2}+1$$

<u>**พิสูจน์**</u> โดยทฤษฎีบท 2.7 เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า $\gamma_g\left(S_k^n\right)\geq\frac{kn}{2}+1$ และ $\gamma_g'\left(S_k^n\right)\leq\frac{kn}{2}+1$

ก่อนอื่นจะแสดงว่า $\gamma_g(S_k^n)\geq\frac{kn}{2}+1$ ให้ E เป็นเซตของจุดใน S_k^n ดังรูป



ภาพที่ 9 แสดงส่วน E

พิจารณาแผนของ Staller โดยเล่นแต่ละครั้งพยามครอบคลุมครั้งละหนึ่งจุดเสมอ พิจารณาการเล่นเพื่อครอบคลุมส่วน E จะได้ว่า Staller สามารถเล่นครอบคลุมครั้งละ 1 จุด ในส่วนนี้ได้เสมอไม่ว่า Dominator จะเล่นเช่นไร และในส่วน E นี้ Dominator จะสามารถเล่นครอบคลุมได้อย่างมากครั้งละ 3 จุด เนื่องจากทั้งสองฝ่ายต้องเล่นสลับกันจึงทำให้ต้องเล่นรวมกันอย่างน้อย $k\left(\frac{n-2}{2}\right)$ ครั้งในส่วน E ซึ่งจะครอบคลุมไปอย่างมาก $k(n-2)$ จุด จากทั้งหมด $kn+1$ จุด จึงเหลือจุดอีกอย่างน้อย $2k+1$ จุดบนกราฟ

ที่ยังไม่ได้ถูกครอบคลุมโดยการเล่นดังกล่าวมานี้ ซึ่งจุด $2k+1$ จุดนี้ จะมี 2 จุดที่เหลือในแต่ละวิถีที่จะไม่ประชิดกับ จุดต่างวิถีทำให้ต้องเล่นอีกอย่างน้อย k ครั้ง และนอกจาก k ครั้งนี้เห็นได้ชัดว่า Staller สามารถเล่นให้จำนวครั้งเพิ่มขึ้นอย่างน้อย 1 ครั้ง จากการเล่นครอบคลุม 1 จุดต่อจากที่ Dominator เล่นที่ a หรือเล่นที่ a หาก Dominator เล่นที่จุดอื่นในส่วนที่เหลือนี้

จึงได้ผลรวมในการเล่นทั้งหมดอย่างน้อย $k\left(\frac{n-2}{2}\right)+k+1=\frac{kn}{2}+1$ ครั้ง นั่นคือ $\gamma_g(S_k^n)\geq\frac{kn}{2}+1$

ถัดมาจะแสดงว่า $\gamma'_g(S_k^n)\leq\frac{kn}{2}+1$ พิจารณาแผนของ Dominator แบ่งกรณีตามการเริ่มเล่นของ Staller ดังนี้

กรณีที่ 1 Staller เริ่มที่ a จะได้ว่า

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $=1+\gamma_g(kP'_{n-1})$

$$=1+k\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil \quad \text{จากทฤษฎีบท 2.5}$$

$$=\frac{kn}{2}+1$$

กรณีที่ 2 Staller ไม่เริ่มที่ a

ตารางที่ 1 พิจารณาแผนการเล่นของ Dominator ให้ Dominator โต้กลับที่จุด a โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ Staller เริ่มที่ $b_{1,j}$

จุดที่ Staller เริ่มเล่น	จะได้จำนวน การเล่นรวม(ครั้ง)	**จากทฤษฎีบท 2.5** จำนวนการเล่นรวม(ครั้ง)
$b_{1,1}$	$2+\gamma'_g((k-1)P'_{n-1}+P'_{n-2})$	$\frac{kn}{2}+1$
$b_{1,2}$	$2+\gamma'_g((k-1)P'_{n-1}+P'_{n-3})$	$\frac{kn}{2}+1$
$b_{1,3}$	$2+\gamma'_g((k-1)P'_{n-1}+P'_{n-4})$	$\frac{kn}{2}+1$
$b_{1,j}$; $j\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$	$2+\gamma'_g((k-1)P'_{n-1}+P'_{n-j-1}+P''_{j-3})$	$\frac{kn}{2}+1$
$b_{1,j}$; $j\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$	$2+\gamma'_g((k-1)P'_{n-1}+P'_{n-j-1}+P''_{j-3})$	$\frac{kn}{2}+1$

จุดที่ Staller เริ่มเล่น	จะได้จำนวน การเล่นรวม(ครั้ง)	**จากทฤษฎีบท 2.5** จำนวนการเล่นรวม(ครั้ง)
$b_{1,j}$; $j \equiv 2 \pmod 4$	$2+\gamma'_g((k-1)P'_{n-1}+P'_{n-j-1}+P''_{j-3})$	$\frac{kn}{2}+1$
$b_{1,j}$; $j \equiv 3 \pmod 4$	$2+\gamma'_g((k-1)P'_{n-1}+P'_{n-j-1}+P''_{j-3})$	$\frac{kn}{2}+1$
$b_{1,n}$	$2+\gamma'_g((k-1)P'_{n-1}+P'_{n-j-1}+P''_{j-3})$	$\frac{kn}{2}+1$

จากตารางพบว่าแผนของ Dominator ทำให้เล่นได้อย่างมาก $\frac{kn}{2}+1$ ครั้ง ดังนั้น $\gamma'_g(S_k^n) \le \frac{kn}{2}+1$

■

ทฤษฎีบท 4.3.3 สำหรับจำนวนนับ $k \ge 3$ และ $n \equiv 0 \pmod 4$ จะได้ว่า $\gamma_g(S_k^n) \le \left\lceil \frac{k(2n-1)}{4} \right\rceil + 1$

<u>พิสูจน์</u> พิจารณาแผนการเล่นของ Dominator โดยให้ Dominator เริ่มที่ a

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $=1+\gamma'_g(kP'_{n-1})$

$$=1+k\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k-1}{4} \right\rceil - \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil \quad \text{จากทฤษฎีบท 2.5}$$

$$=1+\left\lceil \frac{k(2n-1)}{4} \right\rceil$$

ดังนั้น $\gamma_g(S_k^n) \le \left\lceil \frac{k(2n-1)}{4} \right\rceil + 1$

■

ทฤษฎีบท 4.3.4 สำหรับจำนวนนับ $k \geq 3$ และ $n \equiv 0 \pmod 4$ จะได้ว่า $\gamma_g'(S_k^n) \leq \left\lfloor \frac{k(2n-1)}{4} + \frac{1}{2} \right\rfloor + 2$

<u>**พิสูจน์**</u> แบ่งกรณีตามการเริ่มเล่นของ Staller ดังนี้

กรณีที่ 1 Staller เริ่มที่ a

จะได้จำนวนครั้งในการเล่น $= 1 + \gamma_g(kP_{n-1}')$

$$= 1 + \frac{kn}{2} + \left\lceil \frac{k-2}{4} \right\rceil - \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \quad \text{จากทฤษฎีบท 2.5}$$

$$\leq 1 + \frac{kn}{2} + \left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil - \left\lceil \frac{k-2}{2} \right\rceil$$

$$= \left\lfloor \frac{k(2n-1)}{4} + \frac{1}{2} \right\rfloor + 2$$

กรณีที่ 2 Staller ไม่เริ่มที่ a

ตารางที่ 2 พิจารณาแผนการเล่นของ Dominator ให้ Dominator โต้กลับที่จุด a โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ Staller เริ่มที่ $b_{1,j}$

จุดที่ Staller เริ่มเล่น	จะได้จำนวน การเล่นรวม(ครั้ง)	**จากทฤษฎีบท 2.5** จำนวนการเล่นรวม(ครั้ง)
$b_{1,1}$	$2+\gamma_g'((k-1)P_{n-1}'+P_{n-2}')$	$1+\frac{kn}{2}+\left\lceil \frac{k}{4} \right\rceil - \left\lceil \frac{k-2}{2} \right\rceil$
$b_{1,2}$	$2+\gamma_g'((k-1)P_{n-1}'+P_{n-3}')$	$1+\frac{kn}{2}+\left\lceil \frac{k-2}{4} \right\rceil - \left\lceil \frac{k-2}{2} \right\rceil$
$b_{1,3}$	$2+\gamma_g'((k-1)P_{n-1}'+P_{n-4}')$	$\frac{kn}{2}+\left\lceil \frac{k-2}{4} \right\rceil - \left\lceil \frac{k-2}{2} \right\rceil$
$b_{1,j}$; $j \equiv 0 \pmod 4$	$2+\gamma_g'((k-1)P_{n-1}'+P_{n-j-1}'+P_{j-3}'')$	$1+\frac{kn}{2}+\left\lceil \frac{k-1}{4} \right\rceil - \left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil$
$b_{1,j}$; $j \equiv 1 \pmod 4$	$2+\gamma_g'((k-1)P_{n-1}'+P_{n-j-1}'+P_{j-3}'')$	$1+\frac{kn}{2}+\left\lceil \frac{k-2}{4} \right\rceil - \left\lceil \frac{k-2}{2} \right\rceil$

จุดที่ Staller เริ่มเล่น	จะได้จำนวน การเล่นรวม(ครั้ง)	**จากทฤษฎีบท 2.5** จำนวนการเล่นรวม(ครั้ง)
$b_{1,j}\ ;\ j \equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$	$2+\gamma'_g((k-1)P'_{n-1}+P'_{n-j-1}+P''_{j-3})$	$1+\frac{kn}{2}+\left\lceil\frac{k-1}{4}\right\rceil-\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil$
$b_{1,j}\ ;\ j \equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$	$2+\gamma'_g((k-1)P'_{n-1}+P'_{n-j-1}+P''_{j-3})$	$\frac{kn}{2}+\left\lceil\frac{k-2}{4}\right\rceil-\left\lceil\frac{k-2}{2}\right\rceil$
$b_{1,n}$	$2+\gamma'_g((k-1)P'_{n-1}+P'_{n-j-1}+P''_{j-3})$	$\le 1+\frac{kn}{2}+\left\lceil\frac{k-1}{4}\right\rceil-\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil$

จากตารางพบว่าแผนของ Dominator ทำให้เล่นได้อย่างมาก $1+\frac{kn}{2}+\left\lceil\frac{k}{4}\right\rceil-\left\lceil\frac{k-2}{2}\right\rceil=\left\lfloor\frac{k(2n-1)}{4}+\frac{1}{2}\right\rfloor+2$ ครั้ง ดังนั้น $\gamma'_g(S_k^n)\le\left\lfloor\frac{k(2n-1)}{4}+\frac{1}{2}\right\rfloor+2$

■

จากการศึกษาทั้งหมดที่ผ่านมายังทำพบข้อความคาดการณ์ ค่าของจำนวนเกมโดมิเนชันของกราฟดาวขยาย S_k^n ในกรณีที่ $n\equiv 3\,\mathrm{mod}\,4$ และ $n\equiv 0\,\mathrm{mod}\,4$ ซึ่งข้อความคาดการณ์นี้หากใช้เครื่องมือและกระบวนการพิสูจน์แบบเดิม จะมีการแบ่งกรณีย่อยเกิดขึ้นมากมายเกินกว่าจะพิจารณาได้หมด แต่ก็สามารถสร้างข้อความคาดการณ์ได้ จึงขอเสนอข้อความคาดการณ์ไว้เพื่อเป็นประโยชน์ต่อผู้ศึกษาในเรื่องนี้ต่อไป ดังนี้

ข้อความคาดการณ์ที่ 1 สำหรับจำนวนนับ $k\ge 3$ และ $n\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ จะได้ว่า

$$\gamma_g(S_k^n)=\gamma'_g(S_k^n)=\left\lceil\frac{kn+1}{2}\right\rceil \text{ เมื่อ } n\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$$

ข้อความคาดการณ์ที่ 2 สำหรับจำนวนนับ $k\ge 3$ และ $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ จะได้ว่า

$$\gamma_g(S_k^n)=\left\lceil\frac{k(2n-1)}{4}\right\rceil+1 \text{ เมื่อ } n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$$

$$\gamma'_g(S_k^n)=\left\lfloor\frac{k(2n-1)}{4}+\frac{1}{2}\right\rfloor+2 \text{ เมื่อ } n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$$

รายการอ้างอิง

ภาษาต่างประเทศ

Brešar, B., Dorbec, P., Klavžar, S., & Košmrlj, G. (2014). Domination game: effect of edge-and vertex-removal. Discrete Mathematics, 330, 1-10.

Brešar, B., Klavžar, S., & Rall, D. F. (2010). Domination game and an imagination strategy. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 24(3), 979-991.

Bujtás, C. (2015). Domination game on forests. Discrete Mathematics, 338(12), 2220-2228.

Dorbec, P., Košmrlj, G., & Renault, G. (2015). The domination game played on unions of graphs. Discrete Mathematics, 338(1), 71-79.

Haynes, T. W., Hedetniemi, S., & Slater, P. (1998). Fundamentals of domination in graphs. CRC press.

Haynes, T. (2017). Domination in graphs: volume 2: advanced topics. Routledge.

Kinnersley, W. B., West, D. B., & Zamani, R. (2013). Extremal problems for game domination number. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 27(4), 2090-2107.

Kinnersley, W. B., West, D. B., & Zamani, R. (2012). Game domination for grid-like graphs.

Ruksasakchai, W., Onphaeng, K., & Worawannotai, C. (2019). Game domination numbers of a disjoint union of paths and cycles. Quaestiones Mathematicae, 42(10), 1357-1372.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	นายตันติกร สว่างศรี
วัน เดือน ปี เกิด	27 สิงหาคม 2531
สถานที่เกิด	กรุงเทพมหานคร
วุฒิการศึกษา	สำเร็จการศึกษาปริญญาตรีศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ศึกษาต่อระดับปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา ภาควิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ที่อยู่ปัจจุบัน	88/296 หมู่8 ต.บางแขม อ.เมืองนครปฐม จ.นครปฐม