



การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับ
สะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์



โดย
นางสาวพจนันท์ วัชรโรทัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร

ปีการศึกษา 2565

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยศิลปากร

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง
เรขาคณิตวิเคราะห์



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร
ปีการศึกษา 2565
ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยศิลปากร

THE STUDY ON LEARNING ACHIEVEMENT IN MATHEMATICS FOR
MATHAYOMSUKSA 4 STUDENTS OF THAPSAKAE WITTAYA SCHOOL BY USING
KWDL TECHNIQUE WITH GEOGEBRA FOR ANALYTIC GEOMETRY



A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for Master of Science (MATHEMATICS STUDY)
Department of MATHEMATICS
Graduate School, Silpakorn University
Academic Year 2022
Copyright of Silpakorn University

หัวข้อ การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น
มัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ
KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์
โดย นางสาวพจนันท์ วัชรโรทัย
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญามหาบัณฑิต
อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วรกฤษณ์ ศุภพร

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศิลปากร ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

.....
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สาธิต นีรัตศัย)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย (ผู้รักษาการแทน)

พิจารณาเห็นชอบโดย

.....
(รองศาสตราจารย์ ดร. สืบสกุล อ้อยยืนยง)

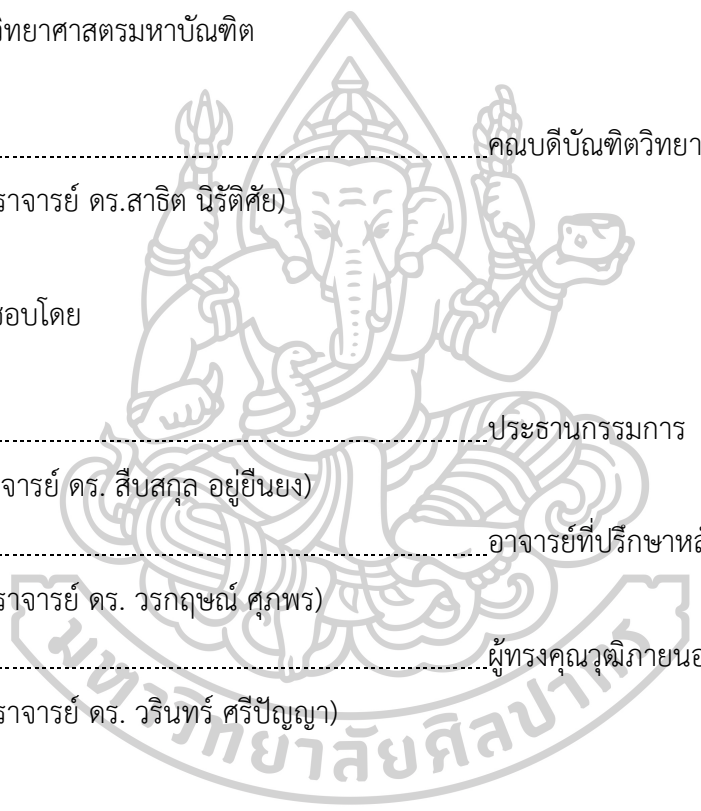
ประธานกรรมการ

.....
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วรกฤษณ์ ศุภพร)

อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก

.....
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วรินทร์ ศรีปัญญา)

ผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก



60316306 : คณิตศาสตร์ศึกษา แผน ก แบบ ก 2 ระดับปริญญาโท

คำสำคัญ : วิธีการสอนแบบ KWDL, โปรแกรม GeoGebra, เรขาคณิตวิเคราะห์

นางสาว พจนันท์ วัชรโรทัย: การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วรฤกษ์ ศุภพร

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ 2) ศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา ที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ตัวอย่างที่ใช้ คือ นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา จังหวัดประจวบคีรีขันธ์ ปีการศึกษา 2563 จำนวน 29 คน ซึ่งได้มาจากการเลือกแบบเจาะจง เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย 1) แผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ 2) แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ 3) แบบสอบถามความพึงพอใจของนักเรียนที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ ได้แก่ ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน t-test for dependent และ t-test for one sample ผลการวิจัย พบว่า 1) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 2) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์หลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 3) ความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยาที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra อยู่ในระดับมากที่สุด

60316306 : Major (MATHEMATICS STUDY)

Keyword : KWDL Technique, GeoGebra, Analytic Geometry

MISS PHOTJANAN WATCHAROTHAI : THE STUDY ON LEARNING ACHIEVEMENT
IN MATHEMATICS FOR MATHAYOMSUKSA 4 STUDENTS OF THAPSAKAE WITTAYA
SCHOOL BY USING KWDL TECHNIQUE WITH GEOGEBRA FOR ANALYTIC GEOMETRY
THESIS ADVISOR : WORAKRIT SUPAPORN

The purposes of this research were 1) to study the learning achievement in mathematics of Mathayomsuksa 4 students of Thapsakae Wittaya School by using KWDL technique with GeoGebra for Analytic Geometry ;2) to study the satisfaction of Mathayomsuksa 4 students of Thapsakae Wittaya School on mathematics learning by using KWDL technique with GeoGebra for Analytic Geometry. The sample group is the 29 Mathayomsuksa 4 students, academic year 2020, Thapsakae Wittaya School, Prachuapkhirikhan by purposive sampling. The instrument of this research consisted of 1) the mathematics lesson plan on Analytic Geometry by using KWDL technique with GeoGebra ;2) the mathematics achievement test on Analytic Geometry and ;3) the satisfaction survey of Mathayomsuksa 4 students on mathematics learning by using KWDL technique with GeoGebra for Analytic Geometry. The statistics in the analysis were mean, standard deviation, t-test for dependent samples and t-test for one samples. The results of the research were as follows: 1) the post-learning achievement in mathematics of Mathayomsuksa 4 students of Thapsakae Wittaya School by using KWDL technique with GeoGebra for Analytic Geometry was higher than the pre-learning at statistical significance level of 0.05 ;2) the post-learning achievement in mathematics of Mathayomsuksa 4 students of Thapsakae Wittaya School by using KWDL technique with GeoGebra for Analytic Geometry was higher than the specified criteria 60 percent at statistical significance level of 0.05 ;3) the satisfaction of Mathayomsuksa 4 students of Thapsakae Wittaya School on mathematics learning by using KWDL technique with GeoGebra for Analytic Geometry was at the highest level.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงสมบูรณ์ไปได้ด้วยดี เนื่องจากได้รับความอนุเคราะห์ คำแนะนำ และเอาใจใส่เป็นอย่างดียิ่งจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วรภุชงค์ ศุภพร ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษา วิทยานิพนธ์ ได้เมตตากรุณาให้คำแนะนำ ตรวจสอบแก้ไขข้อบกพร่องเสมอมา ผู้วิจัยขอกราบ ขอบพระคุณอาจารย์เป็นอย่างสูง

ขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.สืบสกุล อยู่เย็นยง ที่กรุณาเป็นประธานกรรมการสอบ วิทยานิพนธ์ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วรินทร์ ศรีปัญญา เป็นกรรมการในการสอบวิทยานิพนธ์ ซึ่งได้ ตรวจสอบ ให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ และตรวจแก้ไขวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอบพระคุณผู้เชี่ยวชาญในการตรวจคุณภาพเครื่องมือ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุชาติ เสม ประวัติ นายสมศักดิ์ จินดาไทย และนางสุชามนตร์ จินดาไทย ที่ได้กรุณาตรวจสอบ ให้คำแนะนำ และ ข้อคิดเห็น เพื่อปรับปรุงเครื่องมือในการวิจัยให้มีคุณภาพ

ขอบพระคุณ ผู้บริหาร คณะครู และบุคลากรทางการศึกษา โรงเรียนทับสะแกวิทยา ที่กรุณา ให้ความช่วยเหลือในทุกด้าน และเป็นกำลังใจที่ดีเสมอมา และขอบคุณนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ ให้ความร่วมมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นอย่างดี จนทำให้วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ขอบพระคุณบิดามารดาที่สนับสนุน และให้กำลังใจจนสำเร็จด้วยดี คุณค่าและประโยชน์อันพึง มีจากการศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยขอน้อมบูชาพระคุณบิดามารดาและบูรพาจารย์ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอน วิชาความรู้ ให้ความเมตตาแก่ผู้วิจัยเสมอมา และเป็นกำลังใจสำคัญที่ทำให้วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงได้ ด้วยดี

นางสาว พจนันท์ วัชรไธย

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ฌ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	3
สมมติฐานของการวิจัย.....	3
ขอบเขตของการวิจัย.....	4
นิยามศัพท์เฉพาะ.....	4
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	1
1. วิธีการสอนแบบ KWDL.....	1
2. โปรแกรม GeoGebra.....	6
3. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน.....	9
4. ความพึงพอใจ.....	10
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	12
ขั้นตอนที่ 1 การเตรียมการวิจัย.....	12
ขั้นตอนที่ 2 การสร้างและพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในงานวิจัย.....	13
ขั้นตอนที่ 3 การดำเนินการทดลอง.....	17
ขั้นตอนที่ 4 การวิเคราะห์ข้อมูล.....	18

บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	20
ตอนที่ 1 ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ก่อนเรียนและหลังเรียน.....	20
ตอนที่ 2 ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา หลังเรียนกับเกณฑ์ร้อยละ 60 ที่ได้รับการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์	22
ตอนที่ 3 ผลการศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยาที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra	23
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	26
วัตถุประสงค์การวิจัย	26
สรุปผลการวิจัย.....	26
อภิปรายผล.....	27
ข้อเสนอแนะ	30
รายการอ้างอิง.....	31
ภาคผนวก.....	34
ภาคผนวก ก รายนามผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบเครื่องมือ.....	35
ภาคผนวก ข เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	37
ภาคผนวก ค คุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล.....	167
ประวัติผู้เขียน.....	172

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 1 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียน ห้วย สะแกกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ 20	
ตารางที่ 2 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนห้วยสะแกกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิต วิเคราะห์ ก่อนเรียนและหลังเรียน.....	22
ตารางที่ 3 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนห้วยสะแกกวิทยา หลังเรียนกับเกณฑ์ร้อยละ 60 ที่ได้รับการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์.....	23
ตารางที่ 4 การศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนห้วยสะแกกวิทยาที่มีต่อ การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra.....	24
ตารางที่ 5 การประเมินแผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยใช้วิธีการ สอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra	168
ตารางที่ 6 การประเมินความสอดคล้อง (IOC) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชา คณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยผู้เชี่ยวชาญ	169
ตารางที่ 7 การวิเคราะห์ค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์	170
ตารางที่ 8 การประเมินความสอดคล้อง (IOC) ของข้อคำถามความพึงพอใจกับการจัดการเรียนการ สอนในแต่ละด้าน เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra.....	171

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

โรงเรียนทับสะแกวิทยา จังหวัดประจวบคีรีขันธ์ ได้จัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค31202) ซึ่งนักเรียนต้องมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของโรงเรียนไม่ต่ำกว่าร้อยละ 50 จึงจะถือว่าผ่านเกณฑ์ที่กำหนดไว้ จากการจัดการเรียนการสอน เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ พบว่า ในปีการศึกษา 2561 และปีการศึกษา 2562 มีนักเรียนร้อยละ 45.00 และร้อยละ 58.62 ตามลำดับที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำกว่าเกณฑ์ของโรงเรียน ผู้วิจัยได้ศึกษาและสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนจากการตอบคำถามในชั้นเรียน การทำแบบฝึกหัดหรือใบงานต่าง ๆ การสอบเก็บคะแนน และการสอบถามครูผู้สอนท่านอื่น พบว่า นักเรียนไม่สามารถบอกชนิดของกราฟของวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลาจากที่โจทย์กำหนดให้ ไม่สามารถวาดกราฟของวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลาได้ ไม่เข้าใจการเลื่อนแกนของกราฟของวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา และบอกส่วนประกอบของวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลาได้ไม่ถูกต้อง ไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ได้ เนื่องจากไม่สามารถบอกได้ว่า โจทย์กำหนดอะไร หรือถ้าทราบก็ไม่สามารถนำมาแก้โจทย์ปัญหาได้ ขาดความเข้าใจในวิธีการแก้โจทย์ปัญหา และเมื่อให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่แตกต่างไปจากตัวอย่างที่ได้เรียน นักเรียนไม่สามารถแก้ปัญหามาตามที่โจทย์กำหนดให้ได้ จากปัญหาข้างต้นจึงเป็นสาเหตุที่ทำให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดหรือใบงานไม่ถูกต้อง และสอบเก็บคะแนนแล้วไม่ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 50 ส่งผลให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ต่ำกว่าเกณฑ์ร้อยละ 50

โปรแกรม GeoGebra เป็นโปรแกรมทางคณิตศาสตร์สำหรับการเรียนการสอนในเนื้อหาต่าง ๆ ได้แก่ เรขาคณิต พีชคณิต กราฟ สถิติ และแคลคูลัส ผู้ใช้งานสามารถสร้างรูปทรงต่าง ๆ ทางเรขาคณิต ลงพิกัด วัดขนาด หาพื้นที่และปริมาตร พร้อมทั้งสามารถสร้างรูปคลี่ รูปตัด เลื่อนรูปและดูภาพในมุมมองต่าง ๆ ได้ ซึ่งโปรแกรมมีเครื่องมือและคำสั่งไว้อย่างครบถ้วน ช่วยให้ผู้สอนสามารถสร้างรูปเรขาคณิตสามมิติได้ง่าย รวดเร็ว และสามารถนำไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ได้ ช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจเนื้อหาได้ด้วยตนเองผ่านการสำรวจ กระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดการค้นพบ มีความกระตือรือร้นในการเรียน และสามารถวิเคราะห์ปัญหาได้อย่างมีเหตุผล โปรแกรม GeoGebra จึงมีประโยชน์ต่อผู้เรียนในการทำความเข้าใจลักษณะของกราฟวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา มีนักวิจัยหลายท่านทำการศึกษาผลการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ดังนี้ Praveen Shadaan and Kwan Leong Eu (2013) ได้ศึกษา ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

คณิตศาสตร์ เรื่อง วงกลม ที่ได้รับการสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีคะแนนสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05 และ นักเรียนกลุ่มทดลองส่วนใหญ่มีความพึงพอใจต่อการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra สุทิน บัณฑิต (2558) ได้ศึกษาผลของการใช้โปรแกรม GeoGebra ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ เรื่องความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนนางรอง จังหวัดบุรีรัมย์ พบว่า นักเรียนมีคะแนนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน และมีคะแนนหลังการเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 75 อย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05 Puskar Raj Bist (2017) ได้ศึกษา ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิต ที่ได้รับการสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีคะแนนสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 และนักเรียนกลุ่มทดลองร้อยละ 73.71 มีทัศนคติต่อการเรียน เรื่อง เรขาคณิต โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เป็นบวก ฉลาด สายสินธุ์ (2561) ได้ศึกษา การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง ลำดับและอนุกรม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 พบว่า นักเรียนที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ 0.05

การสอนแบบ KWDL เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแนวคิดของ Ogle (1989) ที่เน้นให้ผู้เรียนมีทักษะการอ่าน สามารถคิดวิเคราะห์ด้วยเหตุผล สื่อสารและนำเสนออย่างเหมาะสม ส่งเสริมให้ผู้เรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา โดยฝึกให้ผู้เรียนแก้โจทย์ปัญหาอย่างเป็นระบบ เป็นขั้นเป็นตอน ทำให้ผู้เรียนเข้าใจปัญหาได้อย่างถ่องแท้ และสามารถแก้ปัญหาได้อย่างหลากหลาย รวมไปถึงการนำความรู้ไปปรับใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ อย่างถูกต้องและเหมาะสม โดยขั้นตอนในการแก้ปัญหามีด้วยกัน 4 ขั้นตอน คือ ขั้นที่ 1 : K (What we know) คือ ผู้เรียนทราบในสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ขั้นที่ 2 : W (What we want to know) คือ ผู้เรียนทราบในสิ่งที่โจทย์ต้องการ ขั้นที่ 3 : D (What we do to find out) คือ ผู้เรียนรู้วิธีในการหาคำตอบที่โจทย์ต้องการ ขั้น 4 : L (What we learned) คือ ผู้เรียนสรุปสิ่งที่โจทย์ต้องการ การสอนแบบ KWDL จะช่วยให้นักเรียนได้ฝึกทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย สามารถทำงานได้อย่างเป็นขั้นตอน สามารถคิดวิเคราะห์แยกแยะปัญหาออกเป็นส่วน ๆ มีนักวิจัยหลายท่านทำการศึกษาผลการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค KWDL ดังนี้ สมมาศ ชุมสิงห์ (2557) ได้ศึกษาการประเมินความแตกต่างประสบการณ์และผลการเรียนรู้ เรื่อง การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค KWDL กับการจัดการเรียนรู้ปกติ พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค KWDL มีสูงกว่าการจัดการเรียนรู้แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 และ (2) ประสบการณ์การเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค KWDL สูงกว่าการจัดการเรียนรู้

ปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 ซัพฟิเยห์ สาและ (2559) ได้ศึกษาผลการจัดการเรียนรู้ โดยใช้เทคนิค KWDL เรื่อง ค่ากลางของข้อมูล ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 พบว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ โดยใช้เทคนิค KWDL มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 ชญาณิศา เป็งจันทร์ (2560) ได้ศึกษาการจัดการเรียนรู้โดยใช้ เทคนิคแบบ KWDL เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง โจทย์ปัญหา ของนักเรียนชั้น ประถมศึกษาปีที่ 6 พบว่า นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง โจทย์ปัญหา หลังเรียนสูงกว่าก่อน เรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

ดังนั้น ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียน ทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิต วิเคราะห์
2. ศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา ที่มีต่อการ เรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

สมมติฐานของการวิจัย

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียน ทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิต วิเคราะห์ หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียน ทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิต วิเคราะห์หลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

ขอบเขตของการวิจัย

1. เนื้อหา

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้เป็นเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง 2560)

2. ประชากร คือ

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา จังหวัดประจวบคีรีขันธ์

3. กลุ่มตัวอย่าง คือ

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา จังหวัดประจวบคีรีขันธ์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2563 จำนวน 29 คน ซึ่งได้มาจากการเลือกแบบเจาะจง

4. ระยะเวลาในการวิจัย

ดำเนินการวิจัยในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2563 ใช้เวลาทั้งหมด 19 คาบ คาบละ 50 นาที ประกอบด้วย ทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนเรียน 1 คาบ จัดการเรียนการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ 17 คาบ และทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียน 1 คาบ

5. ตัวแปรที่ใช้ในการวิจัย

ตัวแปรต้น คือ

การจัดการเรียนรู้ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

ตัวแปรตาม คือ

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

2. ความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยาที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

นิยามศัพท์เฉพาะ

การสอนแบบ KWDL เป็นการจัดการเรียนการสอนที่เน้นให้ผู้เรียนมีทักษะการอ่าน การคิดวิเคราะห์ การสื่อสาร และการนำเสนอ เพื่อนำไปสู่การแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งมีขั้นตอนการสอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ชี้นำ ผู้สอนและผู้เรียนร่วมกันทบทวนความรู้

ขั้นที่ 2 ขั้นสอนเนื้อหาใหม่ โดยผู้สอนนำเสนอเนื้อหาใหม่ พร้อมยกตัวอย่างการแก้ โจทย์ปัญหาตามขั้นตอน KWDL โดยขั้นตอนในการแก้ปัญหาด้วยกัน 4 ขั้นตอน คือ ขั้นที่ 1 : K (What we know) คือ ผู้เรียนทราบในสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ขั้นที่ 2 : W (What we want to know) คือ ผู้เรียนทราบในสิ่งที่โจทย์ต้องการ ขั้นที่ 3 : D (What we do to find out) คือ ผู้เรียนรู้วิธีการหาคำตอบที่โจทย์ต้องการ ขั้น 4 : L (What we learned) คือ ผู้เรียนสรุปสิ่งที่โจทย์ต้องการ

ขั้นที่ 3 ขั้นฝึกทักษะ ผู้เรียนทบทวนเนื้อหา แล้วแก้โจทย์ปัญหาตามขั้นตอน KWDL จากแบบฝึกหัดที่ผู้สอนสร้างขึ้น

ขั้นที่ 4 ขั้นสรุป ผู้สอนและผู้เรียนร่วมกันสรุปสิ่งที่เรียน

โปรแกรม GeoGebra หมายถึง โปรแกรมคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในการจัดการเรียนการสอน โดยรวบรวมสิ่งที่จำเป็น ได้แก่ เรขาคณิต พีชคณิต กราฟ สถิติ และแคลคูลัส

การสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เป็นการจัดการเรียนการสอนที่ผู้วิจัย ประยุกต์จากการสอนแบบ KWDL และการใช้โปรแกรม GeoGebra เพื่อการเรียนรู้ โดยมีขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นนำ ผู้สอนและผู้เรียนร่วมกันทบทวนความรู้

ขั้นที่ 2 ขั้นสอนเนื้อหาใหม่ โดยผู้สอนนำเสนอเนื้อหาใหม่ด้วยโปรแกรม GeoGebra พร้อมยกตัวอย่างการแก้โจทย์ปัญหาตามขั้นตอน KWDL โดยขั้นตอนในการแก้ปัญหาด้วยกัน 4 ขั้นตอน คือ ขั้นที่ 1 : K (What we know) คือ ผู้เรียนทราบในสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ขั้นที่ 2 : W (What we want to know) คือ ผู้เรียนทราบในสิ่งที่โจทย์ต้องการ ขั้นที่ 3 : D (What we do to find out) คือ ผู้เรียนรู้วิธีการหาคำตอบที่โจทย์ต้องการ ขั้น 4 : L (What we learned) คือ ผู้เรียนสรุปสิ่งที่โจทย์ต้องการ

ขั้นที่ 3 ขั้นฝึกทักษะ ผู้เรียนทบทวนเนื้อหา แล้วแก้โจทย์ปัญหาตามขั้นตอน KWDL จากแบบฝึกหัดที่ผู้สอนสร้างขึ้น

ขั้นที่ 4 ขั้นสรุป ผู้สอนและผู้เรียนร่วมกันสรุปสิ่งที่เรียน

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง คะแนนของนักเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ซึ่งได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ความพึงพอใจ หมายถึง ความรู้สึกของนักเรียนที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ซึ่งวัดได้จากการทำแบบสอบถามวัดความพึงพอใจที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยนำเสนอตามลำดับหัวข้อต่อไปนี้

1. วิธีการสอนแบบ KWDL
 - 1.1 การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสอนแบบ KWDL
 - 1.2 ประโยชน์ของวิธีการสอนแบบ KWDL
 - 1.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนแบบ KWDL ทั้งในและต่างประเทศ
2. โปรแกรม GeoGebra
 - 2.1 ลักษณะของโปรแกรม GeoGebra
 - 2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ทั้งในและต่างประเทศ
3. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
 - 3.1 ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
 - 3.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
4. ความพึงพอใจ

1. วิธีการสอนแบบ KWDL

1.1 การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสอนแบบ KWDL

นิตยา ภูสำเนา (2557) ได้กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้แบบ KWDL คือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นให้ผู้เรียนมีทักษะกระบวนการอ่าน การคิดวิเคราะห์โจทย์ปัญหาอย่างหลากหลาย ซึ่งสอดคล้องกับทักษะการคิดอย่างรู้ตัวว่าตนคิดอะไร มีวิธีคิดอย่างไร สามารถตรวจสอบความคิดของตนเองได้ และสามารถปรับเปลี่ยนกลวิธีการคิดของตนได้ โดยผู้เรียนจะได้รับการฝึกให้ตระหนักในกระบวนการทำความเข้าใจตนเอง มีการวางแผนตามเป้าหมาย ตรวจสอบความเข้าใจและแสวงหาคำตอบ ซึ่งมีขั้นตอน 4 ขั้นตอน คือ

ขั้นที่ 1 K: ผู้เรียนรู้อะไรบ้าง (What you Know) หมายถึง ขั้นตอนของการเตรียมความรู้พื้นฐาน ซึ่งอาจทำได้หลายวิธี เช่น ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันบันทึกความรู้บนกระดานดำในรูปแบบของแผนที่ความคิดให้ชัดเจนซึ่งประกอบด้วยความคิดหลัก ความคิดรอง และความคิดย่อยตามลำดับ

โดยผู้สอนช่วยจัดข้อความที่เป็นความคิดให้ถูกต้องก่อนที่จะให้ผู้เรียนคัดลอกแผนที่ความคิดหรือแผนผังนั้นลงในกระดาษ ถ้าผู้เรียนคุ้นเคยกับการเขียนแผนผังความคิดแล้ว ผู้สอนอาจให้ผู้เรียนแต่ละคนเขียนสิ่งที่ตนรู้เกี่ยวกับหัวข้อที่ผู้สอนให้ผู้เรียนเรียนรู้เป็นแผนผังความคิดด้วยตนเอง

ขั้นที่ 2 W: ผู้เรียนต้องการรู้อะไร (What you want to Know) หมายถึง ขั้นตอนที่ผู้เรียนต้องตั้งคำถามว่าต้องการรู้อะไร ด้วยการชี้แนะจากครู ผู้เรียนจะบอกสิ่งที่พวกเขาต้องการจะเรียนรู้ ผู้เรียนจะต้องมีคำถามที่ยังไม่ตอบในเรื่องที่อ่าน หรือผู้เรียนอาจยกหัวข้อที่ถกเถียงกันขึ้นมา และต้องการหาแหล่งความรู้อื่นเพื่อจะหาคำตอบของข้อมูล

ขั้นที่ 3 D: ผู้เรียนทำอะไรบ้าง (What you do) หมายถึง มีวิธีการอย่างไรในการแก้ปัญหา ได้ทำอะไรแล้วบ้าง สมาชิกของกลุ่มได้ใช้แบบบันทึกไปด้วยขณะที่ช่วยกันแก้ปัญหาขั้นตอนรู้อะไรบ้างแล้ว และต้องการรู้อะไรช่วยให้พวกเขาแก้ปัญหาและวางแผนที่จะหาวิธีแก้ แล้วจึงประเมินคำตอบว่าได้ทำอะไรแล้วบ้าง บันทึกช่วยให้ผู้เรียนคิดอย่างมีสติ ถึงแผนและกระบวนการดำเนินงานที่พวกเขาได้ใช้ในขณะทำงานร่วมกันในการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 4 L: ผู้เรียนได้เรียนรู้อะไร (What you Learned) หมายถึง ผู้เรียนได้เรียนรู้อะไรแล้วนำมาเล่าสู่กันฟัง แล้วบันทึกไว้โดยสรุปเนื้อหาที่ได้เรียนรู้จากที่ครูสอนและสรุปเป็นองค์ความรู้ของตนเอง

ซัพพีเยร์ สาลและ (2559) ได้กล่าวถึง การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสอนแบบ KWDL ไว้ว่าเป็นกระบวนการสอนที่เน้นให้ผู้เรียนสื่อสารทางคณิตศาสตร์ผ่านการตอบคำถาม ซึ่งมีขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นนำ เป็นการทบทวนความรู้ที่จำเป็นต้องใช้และแจ้งจุดประสงค์ของ การเรียนในคาบนั้น

ขั้นที่ 2 ขั้นสอนเนื้อหาใหม่ โดยครูเป็นผู้นำเสนอเนื้อหาใหม่และผู้เรียนร่วมกันอ่านตีความหมายโจทย์และแก้ปัญหาตามขั้นตอน KWDL

ขั้นที่ 3 ขั้นฝึกทักษะ เป็นขั้นที่ให้ผู้เรียนทำแบบฝึกทักษะตามขั้นตอน KWDL จากแบบฝึกหัดที่ครูสร้างขึ้น และจากหนังสือเรียน

ขั้นที่ 4 ขั้นสรุป ครูและผู้เรียนร่วมกันสรุปสิ่งที่เรียนในคาบนั้น ๆ

จรรยา หารพรม (2560) ได้กล่าวไว้ว่า การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสอนแบบ KWDL หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นการฝึกทักษะการคิด การวิเคราะห์ การคิดอย่างเป็นระบบเป็นขั้นเป็นตอน และให้เหตุผลในการหาคำตอบได้ แบ่งเป็น 4 ขั้นตอน ได้แก่

ขั้นที่ 1 K : ผู้เรียนร่วมกันหาสิ่งที่โจทย์กำหนด

ขั้นที่ 2 W : ผู้เรียนร่วมกันหาสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ/ปัญหา

ขั้นที่ 3 D : ผู้เรียนร่วมกันดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

ขั้นที่ 4 L : ผู้เรียนร่วมกันเสนอผลการแก้โจทย์ปัญหา

ชลันดา ปาระมี (2561) ได้ให้ความหมายว่า วิธีการสอนแบบ KWDL เป็นวิธีการสอนที่เน้นให้ผู้เรียนได้ฝึกคิด ฝึกวิเคราะห์โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายตามขั้นตอน รวมทั้งผู้เรียนสามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งมี 4 ขั้นตอน คือ

ขั้นที่ 1 : K ผู้เรียนรู้อะไรบ้างจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

ขั้นที่ 2 : W ผู้เรียนรู้อะไรที่โจทย์ต้องการ

ขั้นที่ 3 : D ผู้เรียนดำเนินการหาคำตอบ

ขั้นที่ 4 : L ผู้เรียนสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้

เบญจลักษณ์ ภูสามารถ (2563) กล่าวว่า วิธีการสอนแบบ KWDL เป็นการจัดการกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนฝึกด้วยตนเอง รู้จักคิดอย่างเป็นระบบ และตรวจสอบผลที่ได้ เพื่อนำไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ จึงมีประโยชน์ในการฝึกทักษะการอ่าน ทักษะการคิด เขียนสรุป และนำเสนอ โดยมีขั้นตอนการเรียนการสอน 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ K (What we know) ผู้เรียนบอกว่าจะรู้อะไรบ้างในสิ่งที่โจทย์กำหนดโดยครูเป็นผู้ตั้งคำถาม

ขั้นที่ W (What you want to know) ผู้เรียนบอกสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบหรือผู้เรียนต้องการหาโดยครูเป็นผู้ตั้งคำถาม

ขั้นที่ D (What you do) ผู้เรียนบอกถึงวิธีการหาคำตอบโดยครูเป็นผู้ตั้งคำถาม

ขั้นที่ L (What you Learned) ผู้เรียนบอกสิ่งที่ได้เรียนรู้โดยครูเป็นผู้ตั้งคำถาม

จากการศึกษาวิธีการสอนแบบ KWDL ข้างต้น สรุปได้ว่า การสอนแบบ KWDL เป็นการจัดการเรียนการสอนที่เน้นให้ผู้เรียนมีทักษะการอ่าน การคิดวิเคราะห์ การสื่อสาร และการนำเสนอ เพื่อนำไปสู่การแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งมีขั้นตอนการสอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นนำ ผู้สอนและผู้เรียนร่วมกันทบทวนความรู้

ขั้นที่ 2 ขั้นสอนเนื้อหาใหม่ โดยผู้สอนนำเสนอเนื้อหาใหม่ พร้อมยกตัวอย่างการแก้โจทย์ปัญหาตามขั้นตอน KWDL โดยขั้นตอนในการแก้ปัญหาเหมือนกัน 4 ขั้นตอน คือ ขั้นที่ 1 : K (What we know) คือ ผู้เรียนทราบในสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ขั้นที่ 2 : W (What we want to know) คือ ผู้เรียนทราบในสิ่งที่โจทย์ต้องการ ขั้นที่ 3 : D (What we do to find out) คือ ผู้เรียนรู้วิธีการหาคำตอบที่โจทย์ต้องการ ขั้น 4 : L (What we learned) คือ ผู้เรียนสรุปสิ่งที่โจทย์ต้องการ

ขั้นที่ 3 ขั้นฝึกทักษะ ผู้เรียนทบทวนเนื้อหา แล้วแก้โจทย์ปัญหาตามขั้นตอน KWDL จากแบบฝึกหัดที่ผู้สอนสร้างขึ้น

ขั้นที่ 4 ขั้นสรุป ผู้สอนและผู้เรียนร่วมกันสรุปสิ่งที่เรียน

1.2 ประโยชน์ของวิธีการสอนแบบ KWDL

นิตยา ภูสำเนา (2557) ได้กล่าวว่า การสอนแบบ KWDL ส่งเสริมให้ผู้เรียนแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ และส่งเสริมผู้เรียนให้มีความสามารถในการอ่าน มีความสามารถในการคิดเชิงวิเคราะห์ และสังเคราะห์

กนกพร เทพธิ (2558) ได้กล่าวว่า การสอนแบบ KWDL เป็นกระบวนการเรียนรู้ที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนมีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ส่งเสริมความสามารถในการคิด ความสามารถในการแก้ปัญหา และเป็นแรงเสริมให้ผู้เรียนคิดอย่างเป็นระบบ ถ่ายทอดอย่างเป็นขั้นตอน ส่งผลให้ผู้เรียนมีความเข้าใจในเรื่องนั้นได้เป็นอย่างดี

ชลันดา ปาระมี (2561) ได้กล่าวว่า การสอนแบบ KWDL ทำให้ผู้เรียนรู้จักการแก้ปัญหาอย่างเป็นขั้นตอน สามารถแยกโจทย์ปัญหาออกเป็นประเด็นต่าง ๆ ได้ ฝึกคิดอย่างเป็นระเบียบ มีแบบแผน ผู้เรียนใช้ความรู้เดิมที่ได้รับการฝึกมาก่อนตามประเด็นที่กำหนดให้ เพื่อหาว่าอะไรคือสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ ทาวิธีการที่จะได้คำตอบมีอะไรบ้างตามองค์ประกอบของวิธีการสอนแบบ KWDL และช่วยกระตุ้นให้ผู้เรียนคิดหาคำตอบได้ดียิ่งขึ้น ส่งผลให้การเรียนวิชาคณิตศาสตร์น่าสนใจ และไม่น่าเบื่อ

นิตยา สิ้นลือนาม (2562) กล่าวว่า การสอนแบบ KWDL เป็นวิธีการสอนที่ช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจโจทย์ปัญหาจากกรณีวิเคราะห์ มีการกำหนดเป้าหมายในการดำเนินการแต่ละขั้นอย่างชัดเจน ซึ่งทำให้ผู้เรียนเกิดทัศนคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ เรียนด้วยความสนุก สามารถเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง ช่วยให้ผู้เรียนเกิดความสนใจกระตือรือร้นในการเรียน

เบญจลักษณ์ ภูสามารถ (2563) ได้กล่าวว่า การสอนแบบ KWDL เป็นเทคนิคการสอนที่มีประโยชน์อย่างมากในการนำมาแก้ปัญหาทางการเรียนรู้เรื่องโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ต้องใช้ความสามารถในการอ่าน ความสามารถในการคิดวิเคราะห์ เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจกับคำถามหรือโจทย์ปัญหาได้อย่างชัดเจน และยังสามารถนำไปประยุกต์ในสถานการณ์ต่าง ๆ ของตนได้เป็นอย่างดี

จากการศึกษาประโยชน์ของวิธีการสอนแบบ KWDL ข้างต้น สรุปได้ว่า การสอนแบบ KWDL เป็นการจัดการเรียนการสอนที่ช่วยพัฒนาผู้เรียนให้สามารถคิดวิเคราะห์ แก้ปัญหา และส่งเสริมให้ผู้เรียนคิดอย่างเป็นลำดับขั้นตอน ทำให้ผู้เรียนคิดหาคำตอบได้ดียิ่งขึ้น และเกิดความสนใจกระตือรือร้นในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

1.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนแบบ KWDL ทั้งในและต่างประเทศ

นิตยา ภูสำเนา (2557) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ความสามารถในการคิดวิเคราะห์ และเจตคติต่อการ

เรียนคณิตศาสตร์ระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ KWDL และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ ใช้ปัญหาเป็นฐาน และได้ข้อสรุปว่า (1) ดัชนีประสิทธิผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ KWDL และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบใช้ปัญหาเป็นฐาน เท่ากับ 0.7001 และ 0.6723 ตามลำดับ (2) แผนการสอนแบบ KWDL และแผนการสอนแบบใช้ปัญหาเป็นฐาน วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีประสิทธิภาพเท่ากับ 85.17/85.07 และ 83.38/81.48 ตามลำดับ (3) นักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบใช้ปัญหาเป็นฐาน และแบบ KWDL มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการคิดวิเคราะห์ และเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ หลังเรียนสูงกว่า ก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 (4) นักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ KWDL มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนความสามารถในการคิดวิเคราะห์ และเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ สูงกว่านักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบใช้ปัญหาเป็นฐานอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ($p < 0.05$)

อติยา พรรษา (2558) ได้ศึกษา เรื่อง การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การหาร ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้เทคนิค KWDL และได้ข้อสรุปว่า (1) ประสิทธิภาพของแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้เทคนิค KWDL เรื่อง การหาร ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีประสิทธิภาพเท่า 85.10/82.35 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ 75/75 ที่ตั้งไว้ (2) ค่าดัชนีประสิทธิผลการจัดการเรียนรู้โดยใช้เทคนิค KWDL เรื่อง การหาร ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 เท่ากับ 0.7201 แสดงว่า ผู้เรียนมีความก้าวหน้าในการเรียนรู้คิดเป็นร้อยละ 72.01 (3) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนโดยใช้เทคนิค KWDL หลังเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนโดยใช้แผนการจัดการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

ชีพิยะห์ สาและ (2559) ได้ศึกษา ผลการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค KWDL เรื่อง ค่ากลางของข้อมูล ที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และได้ข้อสรุปว่า (1) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค KWDL สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 (2) ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค KWDL สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 (3) ความพึงพอใจของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค KWDL เรื่อง ค่ากลางของข้อมูล อยู่ในระดับมากขึ้นไป

ชญาณิศา เบ็งจันทร์ (2560) ได้ศึกษาการจัดการเรียนรู้โดยใช้เทคนิค KWDL เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์ปัญหา ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และได้ข้อสรุปว่า (1) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์ปัญหา ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

(2) ประสิทธิภาพรวมของแผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิค KWDL เรื่อง โจทย์ปัญหาของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาเชียงใหม่ เขต 1 จำนวน 9 แผนการจัดการเรียนรู้มีค่าประสิทธิภาพเท่ากับ 77.31/79.25 มีประสิทธิภาพสูงกว่า เกณฑ์ 75/75 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 (3) ความพึงพอใจของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ เรื่อง โจทย์ปัญหา โดยใช้เทคนิค KWDL โดยมีความพึงพอใจอยู่ในระดับพึงพอใจมาก

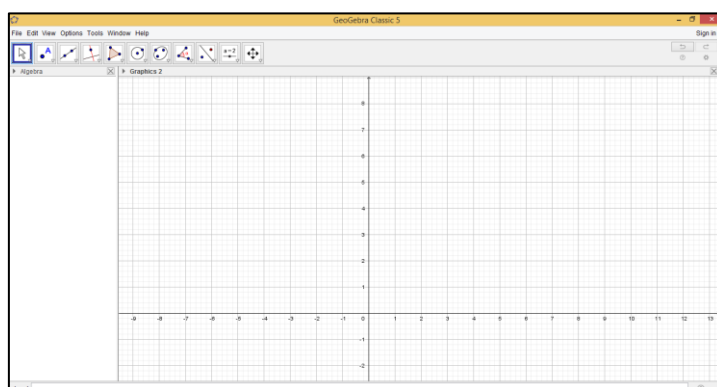
จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการสอนแบบ KWDL พบว่า การใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ในการจัดการเรียนรู้จะช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจในกระบวนการคิดวิเคราะห์ คิดอย่างเป็นระบบ เป็นขั้นเป็นตอน และช่วยพัฒนาการแก้ปัญหา และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ส่งผลให้ผลการเรียนของนักเรียนดีขึ้น ด้วยเหตุผลดังกล่าวทำให้ผู้วิจัยสนใจจะใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ในการพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน

2. โปรแกรม GeoGebra

2.1 ลักษณะของโปรแกรม GeoGebra

โปรแกรม GeoGebra คือ โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการจัดการเรียนรู้โปรแกรมได้รวบรวมสิ่งต่าง ๆ ได้แก่ กราฟ พีชคณิต เรขาคณิต สถิติ และแคลคูลัส และสามารถแสดงฟังก์ชันสมการ องค์กรประกอบเชิงพีชคณิตองค์กรประกอบเชิงจำนวน และองค์กรประกอบเชิงเรขาคณิต โดยองค์กรประกอบเชิงเรขาคณิตและองค์กรประกอบเชิงพีชคณิตจะแสดงผลสอดคล้องกัน เมื่อแก้ไของค์กรประกอบใดองค์กรประกอบหนึ่งแล้วอีกองค์กรประกอบหนึ่งจะเปลี่ยนแปลงไปอัตโนมัติ ซึ่งทำให้ผู้เรียนสามารถเข้าใจแก่นทศน์ทางคณิตศาสตร์มากขึ้น

หน้าต่างผู้ใช้งานของโปรแกรม GeoGebra ถูกแบ่งออกเป็น 2 ส่วนหลัก ๆ คือ หน้าต่างพีชคณิต (Algebra Window) และหน้าต่างภาพ (Graphical Window) ดังภาพ



ภาพ 1 หน้าต่างผู้ใช้งานของโปรแกรม GeoGebra

1) แถบเมนู (Menu bar) อยู่ด้านบนของหน้าต่างโปรแกรม จัดเตรียมไว้สำหรับ บันทึก พิมพ์ ส่งออกชิ้นงาน และสามารถเปลี่ยนการตั้งค่าของโปรแกรม สร้างเครื่องมือกำหนดเอง และแก้ไขแถบเครื่องมือ

2) แถบเครื่องมือ (Toolbar) อยู่ใต้แถบเมนู ประกอบด้วย กลุ่มเครื่องมือ สำหรับสร้างรูปเรขาคณิต สามารถสร้างวัตถุใหม่โดยเลือกจากตัวช่วยแถบเครื่องมือที่อยู่ทางขวา (หัว ลูกศรมุมขวา) ของกลุ่มเครื่องมือ



ภาพ 2 แถบเครื่องมือ

3) หน้าต่างภาพ (Graphical Window) อยู่ทางขวาของหน้าต่างโปรแกรม ประกอบด้วยแผ่นภาพสำหรับนำเสนอภาพเรขาคณิต แกนระบบพิกัดฉาก และกริด สามารถสร้างวัตถุ หรือรูปภาพทางเรขาคณิตจากเครื่องมือบนแถบเครื่องมือ (Toolbar)

4) หน้าต่างพีชคณิต (Algebra Window) อยู่ทางซ้ายของหน้าต่างโปรแกรม ประกอบด้วยสิ่งที่แสดงวัตถุเชิงพีชคณิตและเชิงจำนวน สามารถแก้ไขนิพจน์พีชคณิตได้ในหน้าต่างพีชคณิต

5) ช่องนำเข้า (Input field) จะถูกวางไว้ด้านล่างหรือด้านบนของหน้าต่างภาพ และหน้าต่างพีชคณิต สามารถกรอกนิพจน์พีชคณิตได้โดยใช้แป้นพิมพ์

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ทั้งในและ

ต่างประเทศ

Praveen Shadaan and Kwan Leong Eu (2013) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง วงกลม ที่ได้รับการสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra และได้ข้อสรุปว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 และนักเรียนกลุ่มทดลองส่วนใหญ่มีความพึงพอใจต่อการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra

อธิภูมิ พาสงค์ (2559) ได้ศึกษาการใช้โปรแกรม GeoGebra ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามรูปแบบ 4MAT เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 และได้ข้อสรุปว่า (1) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนหลังเรียนเท่ากับ 23.47 คิดเป็นร้อยละ 78.22 และก่อนเรียน เท่ากับ 6.97 คิดเป็นร้อยละ 23.22 (2) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 75 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 (3) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 (4) ความพึงพอใจของนักเรียนที่มีต่อการใช้โปรแกรม GeoGebra ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามรูปแบบ 4MAT อยู่ในระดับมาก

บรรหาร กาศเกษม และ ทิพย์รัตน์ นพฤทธิ์ (2560) ได้ทำวิจัยเรื่อง ความเข้าใจเชิงความคิดรวบยอด และความมั่นใจในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ภาคตัดกรวย ที่สอนโดยการใช้โปรแกรม GeoGebra และได้ข้อสรุปว่า การใช้การนิกภาพ และการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริงผ่านโปรแกรม GeoGebra ช่วยส่งเสริมให้ผู้เรียนพัฒนาความเข้าใจในเนื้อหา จนนำไปสู่ความเข้าใจเชิงความคิดรวบยอดได้ และ การสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความมั่นใจในการเรียนคณิตศาสตร์ได้ดี

Puskar Raj Bist (2017) ได้ศึกษาเรื่อง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิต ที่ได้รับการสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra และได้ข้อสรุปว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุม ระดับนัยสำคัญทางสถิติ 0.05 และนักเรียนกลุ่มทดลองร้อยละ 73.71 มีทัศนคติต่อการเรียน เรื่อง เรขาคณิต โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เป็นบวก

ฉลาด สายสินธุ์ (2561) ได้ศึกษาการพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง ลำดับและอนุกรม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และได้ข้อสรุปว่า (1) กิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra มีประสิทธิภาพเท่ากับ 88.28/78.84 และ กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ มีประสิทธิภาพเท่ากับ 86.40/75.25 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ 75/75 ที่กำหนดไว้ (2) ดัชนีประสิทธิผลของกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เท่ากับ 0.6408 แสดงว่านักเรียนมีความรู้เพิ่มขึ้นหรือมีความก้าวหน้าในการเรียนคิดเป็นร้อยละ 64.08 และ ดัชนีประสิทธิผลของกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติเท่ากับ 0.5805 (3) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra หลังเรียนและหลังเรียน 2 สัปดาห์ ไม่แตกต่างกัน ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ 0.05 หรือ นักเรียนกลุ่มดังกล่าวมีความคงทนในการเรียนรู้ (4) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ 0.05 (5) ความพึงพอใจของนักเรียนที่มีต่อกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง ลำดับและอนุกรม รายด้านและรวมทุกด้านอยู่ในระดับมาก

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra พบว่าโปรแกรม GeoGebra ช่วยให้ผู้เรียนมีความเข้าใจในเนื้อหามากขึ้น ส่งผลให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของผู้เรียนดีขึ้น ด้วยเหตุผลดังกล่าวทำให้ผู้วิจัยสนใจจะศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน หลังใช้โปรแกรม GeoGebra

3. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

3.1 ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

กิติพงษ์ แห่งสกุล (2556) ได้ให้ความหมายไว้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง ผลที่ได้จากการวัดความรู้ในเนื้อหาที่เรียนมา ประกอบด้วย ความรู้ ทักษะ และสมรรถภาพของสมอง

นิตยา ภูสำเนา (2557) ได้กล่าวไว้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง สิ่งที่นักเรียนได้เรียนรู้จากการเรียนการสอน หรือประสบการณ์ที่ได้จากการปฏิบัติ จนเกิดเป็นความรู้ ความสามารถ และทักษะของนักเรียน

ซัพพียะห์ สาและ (2559) ได้กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คือความสามารถทางสติปัญญาของบุคคลที่เกิดขึ้นจากการเรียนการสอน การฝึกฝน รวมทั้งประสบการณ์ต่าง ๆ

ชลันดา ปาระมี (2561) ได้ให้ความหมายไว้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง ความสำเร็จหรือความสามารถของบุคคลที่พัฒนาขึ้นอันเป็นผลมาจากการเรียนการสอน ประกอบด้วย ความสามารถทางสมอง ความรู้ ทักษะ และจริยธรรม

เบญจลักษณ์ ภูสามารถ (2563) ได้ให้ความหมายไว้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง ผลที่เกิดจากการจัดการเรียนการสอนที่ทำให้นักเรียนเกิดการเปลี่ยนแปลงความสามารถ และพฤติกรรมวัดได้โดยการแสดงออกมาทั้งสามด้าน คือ ด้านพุทธิพิสัย ด้านจิตพิสัย และด้านทักษะพิสัย

จากความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนข้างต้น สรุปได้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง ผลของการวัดความรู้ ทักษะ และความสามารถของผู้เรียนที่เกิดจากการเรียนการสอน การฝึกฝน หรือมวลประสบการณ์ต่าง ๆ

3.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

มนชิตา เรื่องรัมย์ (2556) ได้ให้ความหมายไว้ว่า แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง แบบทดสอบที่สร้างขึ้นเพื่อใช้ในการวัดผลการเรียนรู้ด้านเนื้อหาของวิชานั้น ๆ และทักษะต่าง ๆ ของแต่ละวิชา เพื่อให้ผู้สอนทราบว่าผู้เรียนมีความรู้ ความสามารถที่เกิดจากการเรียนเป็นไปตามเป้าหมายหรือมาตรฐานที่ผู้สอนตั้งไว้หรือไม่

ซัพพียะห์ สาและ (2559) ได้กล่าวถึงไว้ว่า แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นแบบทดสอบวัดความรู้ โดยมุ่งเน้นวัดเนื้อหาที่เรียนมาแล้ว หรือกำลังเรียน เพื่อเป็นเครื่องมือในการประเมินผลการเรียนการสอนรายบุคคล

จารุวรรณ ปะกิกา (2561) ได้กล่าวว่า แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เป็นเครื่องมือที่ใช้ทดสอบ หรือวัดความรู้ และทักษะการเรียนรู้ของนักเรียน โดยวัดพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัย ทำให้ทราบว่าจัดการเรียนการสอนเป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้หรือไม่

นางลักษณีย์ เขียววณิ (2562) ได้กล่าวว่า แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง แบบทดสอบที่มุ่งวัดความรู้ และสมรรถภาพทางสมองในด้านต่าง ๆ ที่นักเรียนได้รับการเรียนรู้มาแล้ว

พรพรรณ เสาร์คำเมืองดี (2562) ได้ให้ความหมายไว้ว่า แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นเครื่องมือที่ผู้สอนใช้ในการตรวจสอบผลการเรียนรู้รวมถึงพฤติกรรมต่าง ๆ จากการเรียนการสอน มีลักษณะเป็นปรนัยหรืออัตนัยขึ้นอยู่กับการวัดผลประเมินผลตามจุดประสงค์การเรียนรู้ของการจัดการเรียนการสอนในเรื่องนั้น ๆ

จากความหมายของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนข้างต้น สรุปได้ว่า แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เป็นแบบทดสอบที่ใช้วัดความรู้ ความสามารถ ที่ผู้เรียนได้ศึกษามาแล้วว่า บรรลุตามจุดประสงค์ที่กำหนดไว้มากน้อยเพียงใด

4. ความพึงพอใจ

กิติพงษ์ แหน่งสกุล (2556) ได้กล่าวว่า ความพึงพอใจ หมายถึง การแสดงออกทางอารมณ์ หรือทางความรู้สึก ที่เกิดจากการประเมินความแตกต่างระหว่างสิ่งที่คาดหวัง กับสิ่งที่ได้รับจริง ในสถานการณ์ต่าง ๆ โดยมีความพึงพอใจในด้านต่าง ๆ ดังนี้ ความพึงพอใจทางด้านอารมณ์ที่ได้จากความต้องการภายนอกและความต้องการภายใน ความพึงพอใจจากการประเมินความแตกต่างและปัจจัยทางด้านสิ่งแวดล้อมและสถานการณ์

กนกพร เทพธิ (2558) ได้ให้ความหมายไว้ว่า ความพึงพอใจ หมายถึง ความรู้สึกนึกคิดหรือเจตคติของบุคคลที่มีต่อการทำงานหรือการปฏิบัติกิจกรรมในเชิงบวก ดังนั้น ความพึงพอใจในการเรียนรู้จึงหมายถึง การแสดงออกถึงความรู้สึกที่ดี เอาใจใส่ในการเรียนรู้ และการเข้าร่วมกิจกรรมการเรียนรู้

จารุวรรณ ปะกิกา (2561) ได้ให้ความหมายไว้ว่า ความพึงพอใจ หมายถึง ความชอบ ความพอใจ หรือความรู้สึกของบุคคลในเชิงบวกที่ส่งผลให้เกิดความสุขต่อบุคคล สถานที่ สิ่งต่าง ๆ รวมทั้งกิจกรรมการเรียนรู้ โดยบรรลุตามความต้องการของบุคคลนั้น ๆ

ฉลาด สายสินธุ์ (2561) ได้กล่าวถึงไว้ว่า ความพึงพอใจ หมายถึง ความรู้สึกทางบวกหรือ มีความสุข เมื่อความต้องการ (Wants) จุดมุ่งหมาย (Goal) หรือแรงจูงใจ (Motivation) ของบุคคลนั้น ๆ ได้รับการตอบสนองหรือประสบความสำเร็จ ความพึงพอใจไม่สามารถบอกได้อย่างชัดเจน แต่สามารถสังเกตได้ว่ามีหรือไม่มี ความพึงพอใจจากพฤติกรรมของบุคคลนั้น ๆ และบุคคลจะเกิดความพึงพอใจได้จะต้องมีปัจจัยหรือสาเหตุของความพึงพอใจนั้น

ชลันดา ปาระมี (2561) ได้กล่าวไว้ว่า ความพึงพอใจ หมายถึง ความรู้สึกชอบ ความรู้สึกที่มีในเชิงบวก เป็นเรื่องของอารมณ์และทัศนะของนักเรียน แสดงออกมาทางพฤติกรรม และองค์ประกอบที่สำคัญในการทำกิจกรรมต่าง ๆ

จากความหมายของความพึงพอใจข้างต้น สรุปได้ว่า ความพึงพอใจ หมายถึง ความรู้สึกหรือทัศนคติในทางบวกของบุคคลที่มีต่อสิ่งใดสิ่งหนึ่ง ซึ่งจะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อนั้นตอบสนองความต้องการของบุคคลนั้น ๆ



บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัย เรื่อง การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ 2) ศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา ที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra โดยผู้วิจัยได้กำหนดขั้นตอนการดำเนินการวิจัย ดังนี้

1. การเตรียมการวิจัย
2. การสร้างและพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในงานวิจัย
3. การดำเนินการทดลอง
4. การวิเคราะห์ข้อมูล

ขั้นตอนที่ 1 การเตรียมการวิจัย

ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา จังหวัดประจวบคีรีขันธ์

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา จังหวัดประจวบคีรีขันธ์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2563 จำนวน 29 คน ซึ่งได้มาจากการเลือกแบบเจาะจง

เนื้อหาที่ใช้ในงานวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ คือ เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง 2560)

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

ดำเนินการวิจัยในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2563 ใช้เวลาทั้งหมด 19 คาบ คาบละ 50 นาที โดยแบ่งได้ดังนี้

- ทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนเรียน 1 คาบ

- จัดการเรียนรู้ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ภาคตัดกรวย 1 คาบ
- จัดการเรียนรู้ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง วงกลม 4 คาบ
- จัดการเรียนรู้ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง พาราโบลา 4 คาบ
- จัดการเรียนรู้ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง วงรี 4 คาบ
- จัดการเรียนรู้ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 4 คาบ
- ทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียน 1 คาบ

ตัวแปรที่ใช้ในการวิจัย

ตัวแปรต้น

คือ การจัดการเรียนรู้ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

ตัวแปรตาม

คือ 1) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

2) ความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยาที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

ขั้นตอนที่ 2 การสร้างและพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในงานวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้ ได้กำหนดเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ

1. แผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra จำนวน 5 แผน ดังนี้

- 1.1 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ภาคตัดกรวย
- 1.2 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง วงกลม
- 1.3 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง วงรี
- 1.4 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง พาราโบลา
- 1.5 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 เรื่อง ไฮเพอร์โบลา

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา เป็นแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 15 ข้อ

3. แบบสอบถามความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา ที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับ โปรแกรม GeoGebra ด้านกิจกรรมการเรียนการสอน ด้านประโยชน์ที่ได้รับ และด้านบรรยากาศการจัดการเรียนรู้

ผู้วิจัยมีขั้นตอนในการสร้างและพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ดังนี้

1. การสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีขั้นตอนการสร้างดังนี้

1.1 ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง 2560) คู่มือครูรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และเอกสารอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการจัดทำแผนการจัดการเรียนรู้

1.2 ศึกษาหลักการ ทฤษฎี และแนวคิดในการจัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL และศึกษาการสร้างสื่อโดยใช้โปรแกรม GeoGebra

1.3 จัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra จำนวน 5 แผน ได้แก่

1.3.1 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ภาคตัดกรวย

1.3.2 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง วงกลม

1.3.3 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง วงรี

1.3.4 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง พาราโบลา

1.3.5 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 เรื่อง ไฮเพอร์โบลา

โดยแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้มีองค์ประกอบสำคัญ คือ ผลการเรียนรู้ สาระสำคัญ จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ ชิ้นงาน/ภาระงาน กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อ/วัสดุอุปกรณ์/แหล่งเรียนรู้ การวัดและประเมินผล บันทึกผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1.4 นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง เหมาะสม แล้วดำเนินการปรับปรุงตามข้อเสนอแนะของอาจารย์ที่ปรึกษา

1.5 นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหา 3 ท่าน ตรวจสอบและประเมินแผนการจัดการเรียนรู้ ด้านความถูกต้อง ความเหมาะสม ความสอดคล้อง และความครอบคลุมของแต่ละองค์ประกอบของแผน ด้วยแบบประเมินแผนการจัดการเรียนรู้สำหรับ

ผู้เชี่ยวชาญ เป็นแบบมาตราส่วนประมาณค่า (Rating scale) ซึ่งมีอยู่ 5 ระดับ โดยกำหนดเกณฑ์การประเมิน ดังนี้

4.51 – 5.00 หมายถึง เหมาะสมมากที่สุด

3.51 – 4.50 หมายถึง เหมาะสมมาก

2.51 – 3.50 หมายถึง เหมาะสมปานกลาง

1.51 – 2.50 หมายถึง เหมาะสมน้อย

1.00 – 1.50 หมายถึง เหมาะสมน้อยที่สุด

1.6 นำผลการประเมินจากผู้เชี่ยวชาญทั้ง 3 ท่าน มาวิเคราะห์หาค่าเฉลี่ย และเปรียบเทียบระดับความเหมาะสมของแผนการจัดการเรียนรู้ โดยใช้เกณฑ์ยอมรับแผนการจัดการเรียนรู้ที่มีค่าเฉลี่ยตั้งแต่ไม่ต่ำกว่า 3.00 พร้อมทั้งปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญ

2. การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ เป็นแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 15 ข้อ มีขั้นตอนการสร้าง ดังนี้

2.1 ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง 2560) คู่มือครูรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

2.2 ศึกษาการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และศึกษาการหาคุณภาพของแบบทดสอบ

2.3 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ เป็นแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 23 ข้อ โดยยึดตามจุดประสงค์การเรียนรู้ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ แล้วเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาเพื่อตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม

2.4 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ให้ผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่านประเมินความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามแต่ละข้อ กับจุดประสงค์การเรียนรู้ แล้วนำผลการประเมินจากผู้เชี่ยวชาญทั้ง 3 ท่าน มาหาค่าความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามแต่ละข้อกับจุดประสงค์การเรียนรู้ (IOC)

$$\text{คำนวณจากสูตร} \quad IOC = \frac{\sum_{i=1}^N R_i}{N}$$

เมื่อ R_i แทน คะแนนการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญคนที่ i

N แทน จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

แล้วเลือกข้อคำถามที่มีค่าเฉลี่ยไม่ต่ำกว่า 0.5

2.5 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ที่ผ่านการประเมินโดยผู้เชี่ยวชาญไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ปีการศึกษา 2563 โรงเรียนทับสะแกวิทยา แล้วนำคะแนนที่ได้จากการทดลองมาวิเคราะห์ ดังนี้

2.5.1 หาค่าความยากง่ายของข้อสอบรายข้อ (p)

$$\text{คำนวณจากสูตร } p = \frac{R}{N}$$

เมื่อ p แทน ค่าความยากง่าย

R แทน จำนวนนักเรียนที่ตอบถูก

N แทน จำนวนนักเรียนทั้งหมด

2.5.2 หาค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบรายข้อ (r)

$$\text{คำนวณจากสูตร } r = \frac{R_H - R_L}{N/2}$$

เมื่อ r แทน ค่าอำนาจจำแนก

R_H แทน จำนวนนักเรียนที่ตอบถูกในกลุ่มคะแนนสูง

R_L แทน จำนวนนักเรียนที่ตอบถูกในกลุ่มคะแนนต่ำ

N แทน จำนวนนักเรียนทั้งหมด

แล้วเลือกข้อคำถามจำนวน 15 ข้อ ที่มีค่าความยากง่ายระหว่าง 0.20 – 0.80 มีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.60 ขึ้นไป และครอบคลุมจุดประสงค์การเรียนรู้ หลังจากนั้นนำข้อสอบทั้ง 15 ข้อมาวิเคราะห์หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งฉบับ โดยใช้สูตรของคูเดอร์และริชาดสัน (KR-20) โดยมีค่าความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่า 0.6

$$\text{คำนวณจากสูตร } \alpha = \frac{K}{K-1} \left[1 - \frac{\sum p(1-p)}{S^2} \right]$$

เมื่อ α แทน ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

K แทน จำนวนข้อคำถาม

p แทน สัดส่วนของนักเรียนที่ตอบถูกต้องต่อจำนวนนักเรียนทั้งหมด

S แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนแบบทดสอบ

3. การสร้างแบบสอบถามวัดความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยาที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ซึ่งมีขั้นตอนการสร้าง ดังนี้

3.1 ศึกษาการสร้างแบบสอบถามวัดความพึงพอใจในการเรียน

3.2 สร้างแบบสอบถามวัดความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ในด้านกิจกรรมการเรียนการสอน 8 ข้อ ด้านประโยชน์ที่ได้รับ 9 ข้อ และด้านบรรยากาศการจัดการเรียนรู้ 6 ข้อ แต่ละข้อเป็นแบบมาตราส่วนประมาณค่า (Rating Scale) แบ่งระดับความพึงพอใจเป็น 5 ระดับ มีรายละเอียดดังนี้

ระดับ 5 หมายถึง พึงพอใจมากที่สุด

ระดับ 4 หมายถึง พึงพอใจมาก

ระดับ 3 หมายถึง พึงพอใจปานกลาง

ระดับ 2 หมายถึง พึงพอใจน้อย

ระดับ 1 หมายถึง พึงพอใจน้อยที่สุด

3.3 นำแบบสอบถามวัดความพึงพอใจที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง เหมาะสม แล้วดำเนินการปรับปรุงตามข้อเสนอแนะของอาจารย์ที่ปรึกษา

3.4 นำแบบสอบถามวัดความพึงพอใจไปให้ผู้เชี่ยวชาญทั้ง 3 ท่านตรวจสอบ และนำมาหาค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับด้านความพึงพอใจ (IOC)

$$\text{โดยใช้สูตร } IOC = \frac{\sum_{i=1}^N R_i}{N}$$

เมื่อ R_i แทน คะแนนการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญคนที่ i

N แทน จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

พร้อมทั้งปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญ

3.5 เลือกข้อคำถามจำนวน 15 ข้อ โดยประกอบด้วย ด้านกิจกรรมการเรียนการสอน 5 ข้อ ด้านประโยชน์ที่ได้รับ 6 ข้อ และด้านบรรยากาศการจัดการเรียนรู้ 4 ข้อ

ขั้นตอนที่ 3 การดำเนินการทดลอง

ผู้วิจัยนำเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยที่ได้รับการปรับปรุงแก้ไขไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง โดยมีลำดับขั้นตอน ดังนี้

1. ทดสอบก่อนเรียนกับกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 15 ข้อ
2. ดำเนินการสอนโดยใช้แผนการจัดการเรียนรู้ ทั้ง 5 แผน ซึ่งในแต่ละแผนจะใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra โดยใช้เวลาในการสอน 17 คาบ คาบละ 50 นาที
3. ทดสอบหลังเรียนกับกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 15 ข้อ ซึ่งเป็นฉบับเดียวกันกับที่ใช้ทดสอบก่อนเรียน
4. ให้นักเรียนทำแบบสอบถามวัดความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยาที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra จำนวน 15 ข้อ
5. นำผลที่ได้ไปวิเคราะห์ด้วยวิธีการทางสถิติ

ขั้นตอนที่ 4 การวิเคราะห์ข้อมูล

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนเรียนและหลังเรียน ที่ได้รับการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra โดยใช้การทดสอบ t – test แบบ dependent

$$\text{คำนวณจากสูตร } t = \frac{\bar{D}}{s_D / \sqrt{n}} \quad \text{โดยมี } df = n-1$$

เมื่อ t แทน ค่าสถิติที่ใช้ในการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

\bar{D} แทน ค่าเฉลี่ยของผลต่างของคะแนน

s_D แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลต่างของคะแนน

n แทน จำนวนนักเรียนทั้งหมด

2. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังเรียนกับเกณฑ์ร้อยละ 60 ที่ได้รับการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra โดยใช้การทดสอบ t-test แบบ one sample

$$\text{คำนวณจากสูตร } t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}} \quad \text{โดยมี } df = n-1$$

เมื่อ t แทน ค่าสถิติที่ใช้ในการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

\bar{x} แทน ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง

μ แทน เกณฑ์ 60% ที่ตั้งไว้

s แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง

n แทน จำนวนนักเรียนทั้งหมด

3. วิเคราะห์ความพึงพอใจของนักเรียนที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิต
วิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra โดยใช้ค่าเฉลี่ย (\bar{x}) ซึ่ง
คำนวณจากสูตร

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

เมื่อ \bar{x} แทน ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง

x_i แทน ข้อมูลที่ i

n แทน จำนวนข้อมูลทั้งหมดของกลุ่มตัวอย่าง

และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ซึ่งคำนวณจากสูตร

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

เมื่อ s แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง

\bar{x} แทน ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง

x_i แทน ข้อมูลที่ i

n แทน จำนวนข้อมูลทั้งหมดของกลุ่มตัวอย่าง

โดยใช้เกณฑ์แปลความหมาย ดังนี้

ค่าเฉลี่ย 4.51 – 5.00 หมายถึง เหมาะสมมากที่สุด

ค่าเฉลี่ย 3.51 – 4.50 หมายถึง เหมาะสมมาก

ค่าเฉลี่ย 2.51 – 3.50 หมายถึง เหมาะสมปานกลาง

ค่าเฉลี่ย 1.51 – 2.50 หมายถึง เหมาะสมน้อย

ค่าเฉลี่ย 1.00 – 1.50 หมายถึง เหมาะสมน้อยที่สุด

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลเป็น 3 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ก่อนเรียนและหลังเรียน

ตอนที่ 2 ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา หลังเรียนกับเกณฑ์ร้อยละ 60 ที่ได้รับการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

ตอนที่ 3 ผลการศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา ที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

โดยมีรายละเอียดการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ก่อนเรียนและหลังเรียน

ตารางที่ 1 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

คนที่	คะแนนก่อนเรียน (เต็ม 15)	คะแนนหลังเรียน (เต็ม 15)	ผลต่างของคะแนนหลังเรียนและคะแนนก่อนเรียน
1	2	8	6
2	10	15	5
3	8	12	4
4	9	14	5

คนที่	คะแนนก่อนเรียน (เต็ม 15)	คะแนนหลังเรียน (เต็ม 15)	ผลต่างของคะแนนหลัง เรียนและคะแนนก่อนเรียน
5	7	11	4
6	7	8	1
7	5	9	4
8	3	13	10
9	2	8	6
10	7	9	2
11	3	8	5
12	5	9	4
13	6	9	3
14	5	13	8
15	4	9	5
16	4	14	10
17	8	13	5
18	9	15	6
19	6	11	5
20	9	14	5
21	4	13	9
22	8	14	6
23	5	10	5
24	7	14	7
25	5	8	3
26	6	13	7
27	2	8	6
28	5	9	4
29	8	15	7
ค่าเฉลี่ย	5.83	11.24	5.41
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	2.28	2.61	2.11

การวิเคราะห์ข้อมูลในส่วนนี้ ผู้วิจัยใช้สถิติ t-test for dependent samples เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ก่อนเรียนและหลังเรียน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

กำหนดสมมติฐาน

H_0 : ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนไม่สูงกว่าก่อนเรียน

H_1 : ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน

สถิติที่ใช้ในการทดสอบ $t = \frac{\bar{D}}{s_D / \sqrt{n}}$ โดยมี $df = n - 1$

โดยสามารถแสดงผลการวิเคราะห์ข้อมูล ดังตาราง

ตารางที่ 2 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ก่อนเรียนและหลังเรียน

ตัวแปร	ก่อนเรียน			หลังเรียน			t
	n	\bar{x}	s	n	\bar{x}	s	
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	29	5.83	2.28	29	11.24	2.61	13.80*

*มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

จากตารางที่ 2 พบว่า ค่าสถิติทดสอบที (t-test) เท่ากับ 13.80 โดยมีค่ามากกว่า $t_{0.05,28} = 1.7033$ สรุปได้ว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

ตอนที่ 2 ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา หลังเรียนกับเกณฑ์ร้อยละ 60 ที่ได้รับการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

การวิเคราะห์ข้อมูลในส่วนนี้ ผู้วิจัยใช้สถิติ t-test for one samples เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา หลังเรียนกับเกณฑ์ร้อยละ 60 ที่ได้รับการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

กำหนดสมมติฐาน

H_0 : ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนไม่สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60

H_1 : ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60

(ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม 15 คะแนน คือ 9 คะแนน ดังนั้น $\mu = 9$)

สถิติที่ใช้ในการทดสอบ $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$ โดยมี $df = n - 1$

โดยสามารถแสดงผลการวิเคราะห์ข้อมูล ดังตาราง

ตารางที่ 3 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา หลังเรียนกับเกณฑ์ร้อยละ 60 ที่ได้รับการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

	n	คะแนนเต็ม	\bar{x}	s	ร้อยละ	t
หลังเรียน	29	15	11.24	2.61	74.94	4.62*

*มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

จากตารางที่ 3 พบว่า ค่าสถิติทดสอบที่ (t-test) เท่ากับ 4.62 โดยมีค่ามากกว่า $t_{0.05,28} = 1.7033$ สรุปได้ว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

ตอนที่ 3 ผลการศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยาที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

การวิเคราะห์ข้อมูลในส่วนนี้ ผู้วิจัยใช้สถิติ ค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เพื่อศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยาที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra โดยสามารถแสดงผลการวิเคราะห์ข้อมูล ดังตาราง

ตารางที่ 4 การศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยาที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

ข้อ	รายการ	\bar{x}	s	แปลผล
ด้านกิจกรรมการเรียนการสอน				
1	โปรแกรมใช้ง่าย และทำให้เข้าใจมากขึ้น	4.76	0.44	มากที่สุด
2	โปรแกรมสวยงาม และดึงดูดความสนใจ	5.00	0.00	มากที่สุด
3	การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเน้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรม	4.86	0.35	มากที่สุด
4	การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนส่งเสริมให้นักเรียนได้พัฒนาการคิด	4.90	0.31	มากที่สุด
5	การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนสนับสนุนให้นักเรียนได้อภิปรายซักถาม และแสดงความคิดเห็น	4.90	0.31	มากที่สุด
ความพึงพอใจด้านกิจกรรมการเรียนการสอน		4.79	0.33	มากที่สุด
ด้านประโยชน์ที่ได้รับ				
6	นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาได้ง่ายขึ้น	4.66	0.48	มากที่สุด
7	นักเรียนเกิดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาที่แตกต่างจากเดิม	5.00	0.00	มากที่สุด
8	นักเรียนเกิดกระบวนการคิด	4.52	0.51	มากที่สุด
9	นักเรียนมีการคิดอย่างเป็นขั้นตอน	4.86	0.35	มากที่สุด
10	นักเรียนสามารถถ่ายทอดแนวคิดได้อย่างเป็นขั้นตอน	4.72	0.46	มากที่สุด
11	นักเรียนลดเวลาในการทำข้อสอบ	4.97	0.19	มากที่สุด
ความพึงพอใจด้านประโยชน์ที่ได้รับ		4.88	0.28	มากที่สุด
ด้านบรรยากาศการจัดการเรียนรู้				
12	นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการเรียน	4.90	0.31	มากที่สุด
13	นักเรียนเรียนรู้ด้วยความสุข	4.79	0.41	มากที่สุด
14	นักเรียนอยากตอบปัญหาในกิจกรรมการเรียนรู้อยู่	4.90	0.31	มากที่สุด
15	นักเรียนได้ร่วมแสดงความคิดเห็นในห้องเรียน	4.69	0.47	มากที่สุด
ความพึงพอใจด้านบรรยากาศการจัดการเรียนรู้		4.82	0.38	มากที่สุด
ความพึงพอใจโดยรวม		4.83	0.33	มากที่สุด

จากตารางที่ 4 พบว่า ระดับความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยาที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ในด้านกิจกรรมการเรียนการสอนอยู่ในระดับมากที่สุด โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.79 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.33 ในด้านประโยชน์ที่ได้รับอยู่ในระดับมากที่สุด โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.88 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.28 และในด้านบรรยากาศการจัดการเรียนรู้อยู่ในระดับมากที่สุด โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.82 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.38 และความพึงพอใจรวมอยู่ในระดับมากที่สุด โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.83 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.33



บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยในชั้นเรียน เรื่อง การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ผู้วิจัยได้สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ ตามวัตถุประสงค์งานวิจัย ดังนี้

วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์
2. เพื่อศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา ที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

สรุปผลการวิจัย

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์หลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05
3. ความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยาที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra อยู่ในระดับมากที่สุด

อภิปรายผล

จากการวิเคราะห์ข้อมูลการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ผู้วิจัยขออภิปรายผลตามวัตถุประสงค์การวิจัย ดังนี้

1. ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 ด้วยการจัดการเรียนรู้โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL เป็นวิธีการสอนที่เหมาะสมกับวิชาคณิตศาสตร์ เนื่องจากเป็นกระบวนการจัดการเรียนรู้ที่ช่วยให้นักเรียนสามารถวิเคราะห์คำถามได้ดียิ่งขึ้น ช่วยให้คิดวิเคราะห์ปัญหาอย่างเป็นระบบ ซึ่งตรงกับที่ Ogle (1986) ผู้พัฒนาการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสอนแบบ KWDL ได้กล่าวว่าการกำหนดขั้นตอนของการสอนแบบ KWDL เพื่อให้ผู้เรียนคิดหาข้อมูลของคำตอบตามที่ต้องการ จะช่วยส่งเสริมทักษะการอ่านมากขึ้น โดยเฉพาะการอ่านเชิงวิเคราะห์ การนำกระบวนการหรือวิธีการสอนแบบ KWDL ไปใช้ในการสอนคณิตศาสตร์เป็นวิธีที่เหมาะสมอีกวิธีหนึ่ง นอกจากนี้การสรุปกระบวนการคิดในขั้นตอน L ของการสอนตามขั้นตอน KWDL จะช่วยให้ผู้เรียนมีความคิดรวบยอดในการทำโจทย์ในรูปแบบที่เคยทำมาแล้ว ซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนสามารถทำโจทย์ปัญหาที่มีรูปแบบคล้าย ๆ กันได้ดียิ่งขึ้น และใช้เวลาน้อยลง เนื่องจากการสรุปจะช่วยให้ผู้เรียนเห็นความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ที่เรียนกับโจทย์ที่ทำ ซึ่งช่วยให้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ต่อไปในอนาคต กนกพร เทพธิ (2558) ได้ศึกษา ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้เทคนิค KWDL ที่มีต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา และความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร พบว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้เทคนิค KWDL มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.01 นิตยา สิ้นลีอนาม (2562) ได้เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังการจัดการเรียนรู้แบบผสมผสานด้วยเทคนิค KWDL สูงกว่าก่อนเรียน ทั้งนี้อาจเป็นเพราะการจัดการเรียนรู้แบบผสมผสานด้วยเทคนิค KWDL ที่สร้างขึ้นเป็นการผสมผสานระหว่างสื่อประสมและเทคนิค KWDL ซึ่งเป็นเทคนิคที่เหมาะสมกับรายวิชาคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะเรื่องโจทย์ปัญหา เพราะเป็นเทคนิคที่เน้นการอ่านแบบคิดวิเคราะห์โจทย์เพื่อหาแนวทางในการหาคำตอบ และการสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra สามารถช่วยในการสร้างมโนภาพเกี่ยวกับวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา ได้ง่ายขึ้น ทำให้ผู้เรียนเกิดการสำรวจ รู้จักตรวจสอบ และเข้าใจในเนื้อหาได้รวดเร็วขึ้น สุทิน บัณฑิต (2558) ได้ศึกษา ผลของการใช้โปรแกรม GeoGebra ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์

เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนนางรอง จังหวัดบุรีรัมย์ พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของผู้เรียนโดยการใช้โปรแกรม GeoGebra ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 และยังพบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 75 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 อธิภูมิ พาสงค์ (2559) ได้ศึกษาการใช้โปรแกรม GeoGebra ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามรูปแบบ 4MAT เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ผลการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 หลังเรียนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้รูปแบบ 4MAT สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 75 ฉลาด สายสินธุ์ (2561) ได้พัฒนากิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรม GeoGebra เรื่อง ลำดับและอนุกรม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 พบว่ากิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรม GeoGebra และกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ เรื่อง ลำดับและอนุกรม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคิดเป็นร้อยละ 78.84/75.25 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ 75/75

2. ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทับสะแกวิทยา โดยใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 เนื่องด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ KWDL เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ฝึกให้ผู้เรียนคิดวิเคราะห์โจทย์ปัญหาอย่างเป็นขั้นตอน และละเอียดถี่ถ้วน ทำให้ผู้เรียนเข้าใจปัญหาได้อย่างชัดเจน และหาวิธีแก้ปัญหาได้อย่างหลากหลาย ส่งผลให้ผู้เรียนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ และเกิดประสิทธิผล ส่งผลให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้ อธิทยา พรธรรษา (2558) พบว่า การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนหลังเรียนที่เรียน โดยการใช้แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การหาร กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้เทคนิค KWDL สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียน โดยใช้แผนการจัดการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 ชัพพิยะห์ สาและ (2559) พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค KWDL มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 ชลันดา ปาระมี (2561) พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนโดยใช้การจัดการเรียนรู้เทคนิค KWDL มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนโดยการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 รวมทั้ง การสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ช่วยให้ผู้เรียนมองเห็นภาพของภาคตัดกรวยเป็นรูปธรรมมากขึ้น ส่งเสริมให้ผู้เรียนสามารถสรุปองค์ความรู้ด้วยตนเอง โดยมีครูผู้สอนเป็นผู้แนะนำ และชี้แนะแนวทาง ตลอดการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ สุทิน บัณฑิต (2558) พบว่า การใช้โปรแกรม GeoGebra ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ช่วยในการอธิบายให้นักเรียนเห็นภาพได้ชัดเจนยิ่งขึ้น โดยเฉพาะ ความแตกต่างของภาพสองมิติและสามมิติ สามารถเข้าใจได้เร็วขึ้น สามารถทดลองปรับค่าต่าง ๆ ได้ ตามต้องการในลักษณะที่แตกต่างกันไป และนักเรียนสามารถสร้างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติได้ หลากหลาย เพื่ออธิบายเนื้อหาให้เห็นภาพและมิติได้ดียิ่งขึ้น ไอริณ ถาวรนนท์ (2561) พบว่า โปรแกรม GeoGebra เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ขั้นการสำรวจและค้นคว้า ทำให้นักเรียน สามารถลองผิดลองถูก ค้นคว้าหาข้อสรุปของสิ่งที่นักเรียนเรียนรู้ได้

3. ผลการศึกษาวิจัย พบว่า ความพึงพอใจของผู้เรียนที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra โดยภาพรวมอยู่ใน ระดับมากที่สุด ($\bar{x} = 4.83, s = 0.33$) เนื่องด้วยการสอนแบบ KWDL ช่วยให้ผู้เรียนแก้โจทย์ปัญหาได้ อย่างเป็นระบบ โจทย์ได้ง่ายขึ้น และสามารถหาคำตอบได้รวดเร็วกว่าเดิม ผู้เรียนได้ฝึกทักษะการคิด และกระบวนการต่าง ๆ ด้วยตนเอง ทำสามารถนำกระบวนการเรียนรู้ไปใช้ได้จริงในสถานการณ์ใหม่ ๆ กนกพร เทพธิ (2558) พบว่า ความพึงพอใจในการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีต่อ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้เทคนิค KWDL โดยภาพรวมอยู่ในระดับดีมาก ชัพพียะห์ สาและ (2559) พบว่า ความพึงพอใจต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค KWDL ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 5 อยู่ในระดับมากขึ้นไป เบญจลักษณ์ ภูสามารถ (2563) พบว่า นักเรียนมีความพึงพอใจต่อการจัด กิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้เทคนิค KWDL เรื่อง โจทย์ปัญหาทศนิยม โดยรวมมีความพึงพอใจอยู่ใน ระดับมากที่สุด นอกจากนี้การสอนโดยใช้โปรแกรม GeoGebra ช่วยให้นักเรียนสามารถวาดกราฟ ของวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลาได้รวดเร็ว หาคำตอบได้ง่ายขึ้น นักเรียนได้ทดลองและ เรียนรู้ด้วยตนเอง ส่งผลให้นักเรียนเกิดความสุขสนาน ใฝ่เรียนรู้ กล้าแสดงความคิดเห็น และสามารถแลกเปลี่ยนเรียนรู้กับผู้อื่นได้อย่างมีเหตุผล อธิภูมิ พาสงค์ (2559) พบว่า ความพึงพอใจของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่มีต่อการใช้โปรแกรม GeoGebra ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ รูปแบบ 4MAT เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น โดยภาพรวมมีความพึงพอใจอยู่ในระดับมาก ไอริณ ถาวรนนท์ (2561) พบว่า ความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่มีต่อการจัดกิจกรรมการ เรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น ตามวัฏจักรการเรียนรู้ 7 ขั้น โดยใช้โปรแกรม GeoGebra โดยภาพรวมอยู่ในระดับมากขึ้นไป

ข้อเสนอแนะ

1. ในการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการสอนแบบ KWDL ชั่วโมงที่ 1 – 3 ผู้เรียนไม่สามารถเขียนสรุปกระบวนการคิดในขั้น L ได้ เนื่องจากผู้เรียนคุ้นเคยกับการทำแบบฝึกหัดที่แสดงวิธีทำ แล้วเขียนตอบเลย ดังนั้นครูจะต้องอธิบายอย่างละเอียดพร้อมยกตัวอย่างเพิ่มเติม และช่วยตรวจสอบความเข้าใจของผู้เรียนในทุกข้อ

2. ครูควรกระตุ้นให้ผู้เรียนแสดงความคิดเห็นอย่างเต็มที่ และเปิดใจให้กว้าง ยอมรับความคิดเห็นที่แปลกแตกต่างของผู้เรียนแต่ละคน พร้อมทั้งให้กำลังใจ ชื่นชม และเสริมแรงให้กับผู้เรียน เพื่อส่งเสริมบรรยากาศในห้องเรียน



รายการอ้างอิง

- Praveen Shadaan, & Kwan Leong Eu. (2013). Effectiveness of Using Geogebra on Students' Understanding in Learning Circles. *The Malaysian Online Journal of Educational Technology*, 1(4).
- Puskar Raj Bist. (2017). Use of GeoGebra in Geometric Construction. *Imperial Journal of Interdisciplinary Research*, 3(9).
- กนกพร เทพธี. (2558). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้เทคนิค *KWDL* ที่มีต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาและความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร. ปรินญาวิทยาสาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี.
- กิติพงษ์ แห่นงสกุล. (2556). การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและทักษะการปฏิบัติงาน เรื่อง การใช้โปรแกรมประมวลผลคำ กลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้วิธีสอนแบบชี้แนะร่วมกับรูปแบบการเรียนการสอนทักษะปฏิบัติของแฮร์โรว์. วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตร์มหาบัณฑิต สาขาวิชาหลักสูตรและการสอน มหาวิทยาลัยหาดใหญ่ สงขลา.
- จรรยา ทารพรม. (2560). การพัฒนาผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์และพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม โดยการจัดการเรียนรู้แบบ *STAD* ร่วมกับ *KWDL* ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3. ปรินญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาหลักสูตรและการนิเทศ มหาวิทยาลัยศิลปากร.
- จารุวรรณ ปะกิกา. (2561). การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน และคุณลักษณะความรับผิดชอบ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค *KWDL*. ปรินญาครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาหลักสูตรและการเรียนการสอน มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม.
- ฉลาด สายสินธุ์. (2561). การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรมจีโอจีบรา เรื่อง ลำดับและอนุกรม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. ปรินญาวิทยาสาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยมหาสารคาม.
- ชญาณิศา เป็งจันทร์. (2560). การจัดการเรียนรู้โดยใช้เทคนิค *KWDL* เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์ปัญหาของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6. วารสารบัณฑิตวิจัย, 8(1).
- ชลันดา ปาระมี. (2561). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการจัดการเรียนรู้เทคนิค *KWDL* กับการเรียนรู้แบบปกติ. ปรินญาครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาหลักสูตรและการเรียนการสอน มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม.
- ชีพิยะห์ สาและ. (2559). ผลการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค *KWDL* เรื่องค่ากลางของข้อมูล ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. ปรินญาวิทยาสาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยบูรพา.
- นงลักษณ์ เขียววณิ. (2562). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนกลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี และ

- ความสามารถในการคิดสร้างสรรค์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยวิธีการจัดการเรียนรู้แบบใช้
โครงงานเป็นฐาน. ปรินญาครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาหลักสูตรและการสอน มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลย
อลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์ ปทุมธานี.
- นิตยา ภูสำเนา. (2557). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
ความสามารถในการคิดวิเคราะห์ และเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ ระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้
เทคนิค *KWDL* และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบใช้ปัญหาเป็นฐาน. ปรินญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชา
หลักสูตรและการสอน มหาวิทยาลัยมหาสารคาม.
- นิตยา สิ้นลือนาม. (2562). การพัฒนาการจัดการเรียนรู้แบบผสมผสานด้วยเทคนิค *KWDL* เพื่อเสริมสร้างทักษะและ
กระบวนการทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1. วารสารศิลปการศึกษาศาสตร์วิจัย,
11(1).
- บรรหาร กาศเกษม และ ทิพย์รัตน์ นพฤทธิ์. (2560). ความเข้าใจเชิงความคิดรวบยอดและความมั่นใจในการเรียน
คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ภาคตัดกรวย ที่สอนโดยใช้โปรแกรม *GeoGebra*. ปรินญา
ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- เบญจลักษณ์ ภูสามารถ. (2563). การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้
แบบ *KWDL* ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5. ปรินญาครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาหลักสูตรและการ
เรียนการสอน มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม.
- พรพรรณ เสาร์คำเมืองดี. (2562). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6
โดยการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค *STAD*. ปรินญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
มหาวิทยาลัยศิลปากร.
- มนชิตา เรืองรัมย์. (2556). การพัฒนาแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้น
พื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้ภาษาไทย ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2. ปรินญาศึกษาศาสตร
มหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนภาษาไทย ภาควิชาหลักสูตรและวิธีการสอน มหาวิทยาลัยศิลปากร.
- สมมาศ ชุมสิงห์. (2557). การประเมินความแตกต่างประสบการณ์และผลการเรียนรู้ เรื่อง การแก้โจทย์ปัญหา ของ
นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค *KWDL* กับการจัดการเรียนรู้ปกติ
ปรินญาครุศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม.
- สุทิน บัณฑิต. (2558). ผลของการใช้โปรแกรม *GeoGebra* ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์
ตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติที่มีต่อผลสัมฤทธิ์
ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนนางรอง จังหวัดบุรีรัมย์. วารสารครุพิบูล, 2(พิเศษ
1/62).
- อติยา พรธชา. (2558). การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การหาร กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้น
ประถมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้เทคนิค *KWDL*. ปรินญาครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาหลักสูตรและการเรียนการสอน
มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม.
- อธิภูมิ พาสงค์. (2559). การใช้โปรแกรม *GeoGebra* ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามรูปแบบ *4MAT* เพื่อพัฒนา
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. ปรินญา

วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีการสอน มหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา.
ไอริณ ถาวรนนท์. (2561). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามวัฏจักรการเรียนรู้ 7 ขั้น โดยใช้โปรแกรม
GeoGebra เรื่อง การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนประจวบวิทยาลัย.
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยบูรพา.



ภาคผนวก



ภาคผนวก ก
รายนามผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบเครื่องมือ



รายนามผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบเครื่องมือ

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุชาติ เสมประวัตติ

นายสมศักดิ์ จินดาไทย

นางสุขามนตร์ จินดาไทย

อาจารย์ประจำสาขาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏกาญจนบุรี

ตำแหน่งครู วิทยาลัยนานาชาติการพิเศษ

โรงเรียนประจวบวิทยาลัย จ.ประจวบคีรีขันธ์

ตำแหน่งครู วิทยาลัยนานาชาติการพิเศษ

โรงเรียนประจวบวิทยาลัย จ.ประจวบคีรีขันธ์



ภาคผนวก ข
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

รหัสวิชา ค 31202 รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2563 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์ เรื่อง ภาคตัดกรวย
ชื่อผู้สอน นางสาวพจนันท์ วัชรทัย เวลา 1 คาบ

1. ผลการเรียนรู้

1. เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ในการแก้ปัญหา

2. สาระการเรียนรู้

เรขาคณิตวิเคราะห์

3. สาระสำคัญ

ภาคตัดกรวย คือ รูปในระนาบที่เกิดจากการตัดกันของระนาบและกรวย ได้แก่ วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K)

- นักเรียนสามารถหาวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา ในระนาบที่เกิดจากการตัดกันของระนาบและกรวย

ด้านทักษะกระบวนการ (P)

- นักเรียนสามารถสื่อสารและนำเสนอผลลัพธ์ที่ได้
- นักเรียนสามารถให้เหตุผลเพื่อให้เกิดข้อเท็จจริง

ด้านคุณลักษณะ (A)

- นักเรียนมีวินัยในตนเอง
- นักเรียนมีความใฝ่รู้ใฝ่เรียน
- นักเรียนมีความมุ่งมั่นในการทำงาน

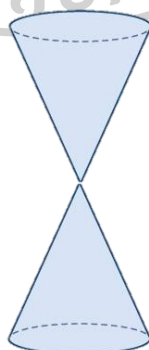
5. กิจกรรมการเรียนการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอนนี้ ใช้เทคนิคการสอนแบบ KWDL ซึ่งมีขั้นตอน 4 ขั้น ดังนี้
ขั้น 1 K (What we know)

1. ครูให้นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra จากนั้นให้นักเรียนทดลองใช้กล่องเครื่องมือต่างๆ ในโปรแกรมด้วยตนเอง พร้อมกับครูอธิบายประกอบใบความรู้ เรื่อง โปรแกรม GeoGebra
2. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียน เรื่อง ระนาบ โดยใช้การถาม – ตอบ
 - ระนาบ มีลักษณะเป็นอย่างไร
(แนวทางการตอบ: ระนาบ หมายถึง พื้นผิวแบนและเรียบ)
 - สิ่งของในชีวิตประจำวันที่มีลักษณะเป็นพื้นผิวแบนและเรียบ มีอะไรบ้าง
(แนวทางการตอบ: กระดาษ A4, ไม้บรรทัด, फिल्मติดหน้าจอโทรศัพท์)
3. ครูนำตัวอย่างของกรวยที่พบเห็นในชีวิตประจำวันมาแสดงให้นักเรียนดู เช่น กรวยกระดาษสำหรับดื่ม น้ำ โคนไอศกรีม กรวยใบตองใส่ขนม แล้วให้นักเรียนร่วมกันอธิบายลักษณะของสิ่งของที่ครูนำมาให้ดูว่ามีลักษณะใดที่เหมือนกัน
4. ครูบอกนักเรียนว่าสิ่งของที่ครูนำมา มีลักษณะรูปทรงที่เรียกว่า กรวย กรวยเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติ ที่มีฐานเป็นรูปวงกลม มียอดแหลมที่ไม่อยู่บนระนาบเดียวกันกับฐาน และเส้นที่ต่อระหว่างจุดยอดและจุดใดๆ บนฐานเป็นส่วนของเส้นตรง จากนั้นครูให้นักเรียนดูรูปกรวยในโปรแกรม GeoGebra และชี้ส่วนที่เป็นฐาน (รูปวงกลม) ยอด และเส้นที่ต่อระหว่างจุดยอดและจุดใดๆ บนฐานเป็นส่วนของเส้นตรง
5. ครูให้นักเรียนร่วมกันบอกรูปเรขาคณิตที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว เช่น จุด เส้นตรง วงกลม วงรีและพาราโบลา พร้อมทั้งบอกลักษณะ และวาดรูปประกอบบนกระดาน

ขั้น 2 W (What we want to know)

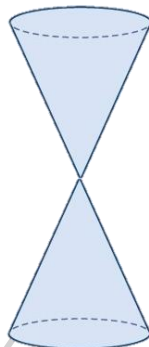
6. ครูปั้นดินน้ำมันตามรูป แล้วเอาแผ่นสังกะสีเรียบตัดลงบนดินน้ำมัน พร้อมกับวาดรูปรอยตัดลงบนกระดาน



7. ครูถามนักเรียนว่า ถ้าครูลองเปลี่ยนมุมในการตัดแล้ว รอยตัดที่ได้จะมีลักษณะเหมือนเดิมหรือไม่

(แนวการตอบ : ไม่เหมือนเดิม)

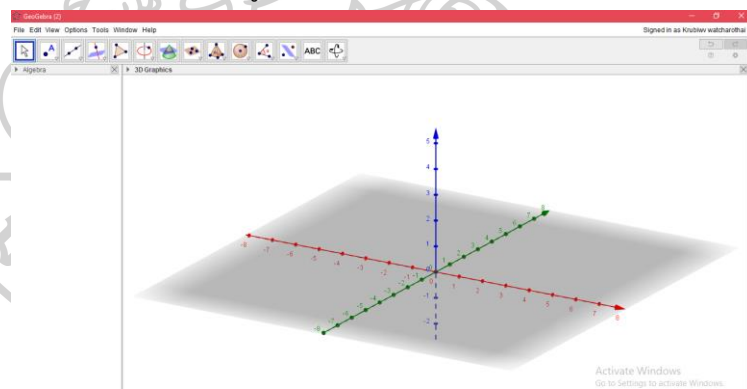
8. ครูบอกนักเรียนว่า ในการศึกษาบทนี้ เราจะศึกษารอยตัดของระนาบกับกรวยกลมตรงสองอันที่มีรูปร่างเหมือนกัน มีจุดยอดตรงกัน และฐานของกรวยทั้งสองขนานกัน ดังรูป



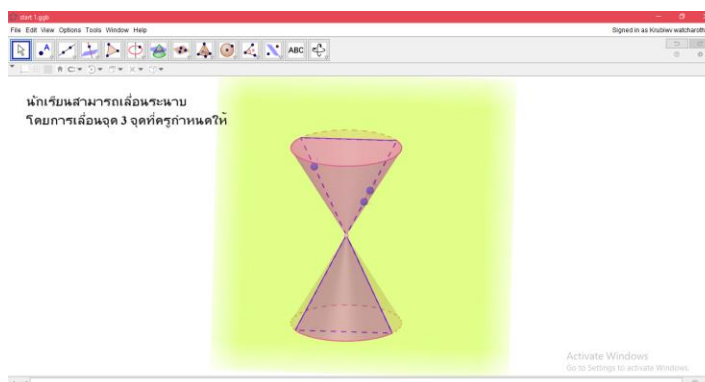
ขั้น 3 D (What we do to find out)

9. ครูแจกดินน้ำมันและแผ่นสีกะสีเรียงให้นักเรียน จากนั้นให้นักเรียนปั้นดินน้ำมันตามรูปในข้อ 8 แล้วทดลองนำแผ่นสีกะสีเรียบตัดดูในมุมต่างๆ ว่าได้รอยตัดเป็นรูปอะไรบ้าง พร้อมจดบันทึกรอยตัดที่ได้ลงในสมุด

10. ให้นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra และเข้าสู่มุมมอง 3D Graphics โดยการเลือก View -> 3D Graphics จะได้หน้าต่างดังรูป



จากนั้นให้เลือกเปิดไฟล์ start 1 โดยการเลือก Desktop -> Conics -> start 1 จะได้หน้าต่างดังรูป

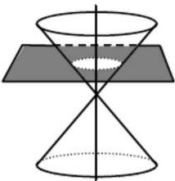
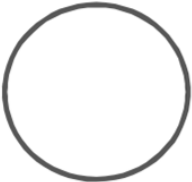
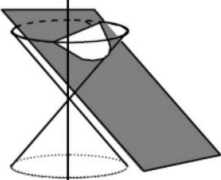

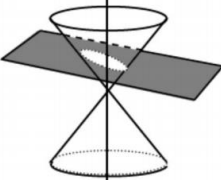

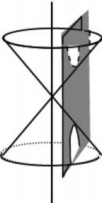

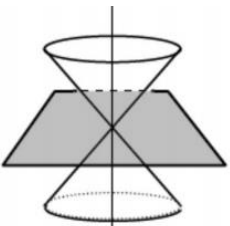


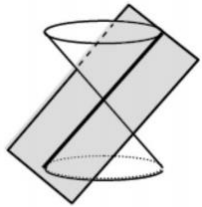

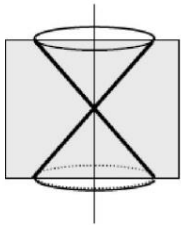
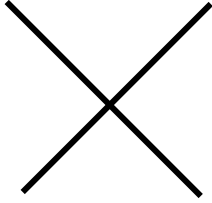
11. ครูแสดงการเลื่อนระนาบให้นักเรียนดูเป็นตัวอย่าง พร้อมกับกระตุ้นให้นักเรียนสังเกตรูปที่เกิดจากการตัดของระนาบและกรวยที่ได้ แล้วให้นักเรียนได้ฝึกลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง และครูเดินดูเพื่อให้คำแนะนำเพิ่มเติม

12. เมื่อนักเรียนเข้าใจขั้นตอนแล้ว ครูให้เวลานักเรียน 20 นาที ในการหารูปที่เกิดจากการตัดของระนาบและกรวยที่มีลักษณะแตกต่างกัน และบันทึกลงในใบงาน

ขั้น 4 L (what we learned)

13. เมื่อครบกำหนดเวลา 20 นาทีแล้ว ครูเลือกตัวแทนนักเรียนโดยการถามความสมัครใจของนักเรียน เพื่อออกมานำเสนอวิธีการตัดและรอยตัดที่ได้ จนได้รูปครบ 7 รูป ซึ่งสรุปได้เป็นดังนี้

รูปแสดงการตัดกันของระนาบกับกรวย	รูปที่เกิดจากการตัดกัน
	 รูปที่ 1
	 รูปที่ 2
	 รูปที่ 3
	 รูปที่ 4
	• (จุด 1 จุด) รูปที่ 5

รูปแสดงการตัดกันของระนาบกับกรวย	รูปที่เกิดจากการตัดกัน
	 (เส้นตรง 1 เส้น) รูปที่ 6
	 (เส้นตรง 2 เส้นตัดกัน) รูปที่ 7

ครูอธิบายนักเรียนเพิ่มเติมว่า ถ้าระนาบตัดผ่านจุดยอด ดังรูปที่ 5 - 7 ในตาราง จะเรียกรอยตัดที่ได้ว่า ภาคตัดกรวยลดรูป ซึ่งจะได้ศึกษาในบทนี้ ในบทนี้เราจะศึกษาภาคตัดกรวยที่ระนาบไม่ผ่านจุดยอด ซึ่งรอยตัดที่ได้ คือ รูปที่ 1 - 4 ซึ่งจะเรียกว่า วงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา ตามลำดับ

13. นักเรียนและครูพูดคุยเกี่ยวกับรูปที่ได้จากการตัดระนาบกับกรวย โดยครูใช้คำถามชี้้นำ ดังนี้

- รูปที่นักเรียนได้แตกต่างจากเพื่อนอย่างไร และทำไมถึงเป็นเช่นนั้น
- นักเรียนเคยเห็นรูปใดบ้างจากทั้งหมด
- นักเรียนคิดว่าพาราโบลาแตกต่างจากไฮเพอร์โบลาอย่างไร

6. สื่อ/วัสดุอุปกรณ์/แหล่งเรียนรู้

1. โปรแกรม GeoGebra
2. ใบความรู้ เรื่อง โปรแกรม GeoGebra
3. ดินน้ำมันและแผ่นสังกะสีเรียบ
4. ใบงาน เรื่อง ภาคตัดกรวย
5. หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2

7. การวัดและประเมินผล

ประเด็นการประเมิน	เครื่องมือ	วิธีการ	เกณฑ์
ด้านความรู้ (K) - นักเรียนสามารถหาวงกลม วงรี พาราโบลา และ ไฮเพอร์โบลา ในระนาบที่เกิดจากการตัดกันของระนาบและกรวย	ใบงาน	การทำใบงาน	นักเรียนได้คะแนน ร้อยละ 60 ขึ้นไป
ด้านทักษะและกระบวนการ (P) - นักเรียนสามารถสื่อสารและนำเสนอผลลัพธ์ที่ได้ - นักเรียนสามารถให้เหตุผลเพื่อให้เกิดข้อเท็จจริง	แบบสังเกต พฤติกรรมการทำงาน	สังเกตพฤติกรรมการทำงาน	นักเรียนได้คะแนนระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ (A) - นักเรียนมีวินัยในตนเอง - นักเรียนมีความใฝ่รู้ใฝ่เรียน - นักเรียนมีความมุ่งมั่นในการทำงาน	แบบสังเกต พฤติกรรมปฏิบัติงาน รายบุคคล	ประเมินการปฏิบัติงาน รายบุคคล	นักเรียนได้คะแนนระดับดีขึ้นไป

บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

รหัสวิชา ค31202

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

บันทึกผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผลการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

2. ปัญหาและอุปสรรคที่พบ

.....

.....

.....

.....

3. แนวทางแก้ไขปัญหาและข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางสาวพจนันท์ วัชรโรทัย)

ครูผู้สอน

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....

.....

.....

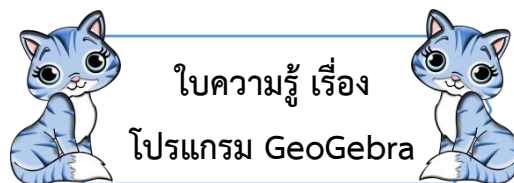
ลงชื่อ

(นายสุชาติ หุทิพย์)

ผู้อำนวยการโรงเรียนทับสะแกวิทยา

..... /..... /.....

ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่



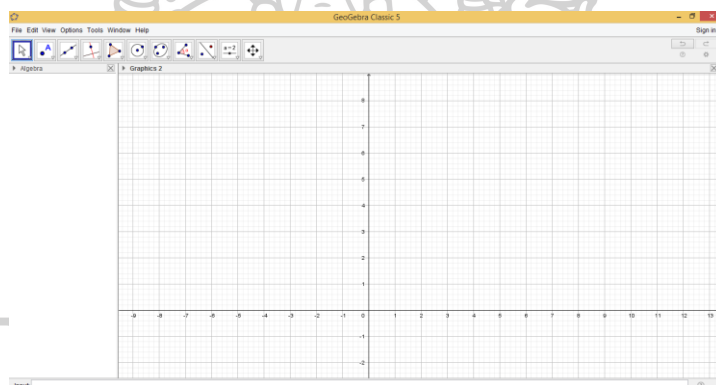
◆ โปรแกรม GeoGebra

เป็นโปรแกรมทางคณิตศาสตร์สำหรับใช้ในการสร้างสื่อการเรียนการสอน โดยโปรแกรมได้รวบรวมสิ่งที่จำเป็นในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เข้าไปในโปรแกรมนี้ ได้แก่ เรขาคณิต พีชคณิต สเปรดชีต กราฟ สถิติ และแคลคูลัส

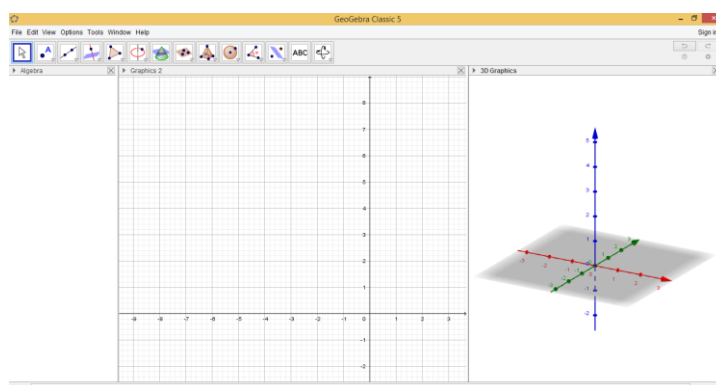
◆ โปรแกรม GeoGebra Version 5.0 จะมีไอคอนดังรูป



◆ หน้าต่างเบื้องต้นของโปรแกรม GeoGebra Version 5.0



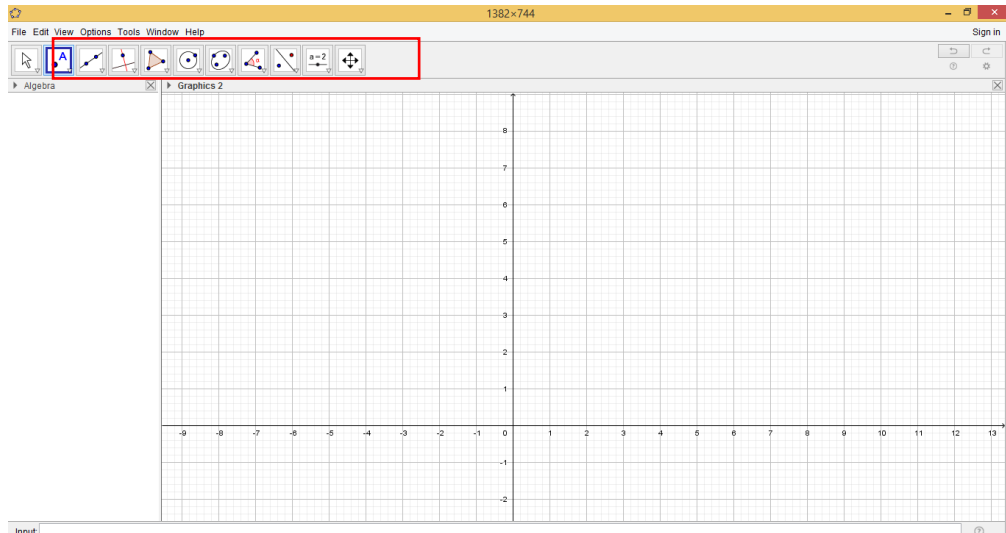
ในหน้าต่างเบื้องต้น จะมีหน้าต่างย่อยแสดงฟังก์ชันมุมมอง 2 แบบ คือ มุมมองในรูปแบบ Algebra และ มุมมองในรูปแบบ 2D Graphics ในที่นี้เราจะเรียน เรื่องภาคตัดกรวย จึงให้นักเรียนเลือกใช้เพียงมุมมองในรูปแบบ 2D Graphics และ 3D Graphics เท่านั้น โดยมุมมองในรูปแบบ 3D Graphics สามารถเลือกใช้โดยการคลิกที่ View -> 3D Graphics จะได้หน้าต่าง ดังรูป



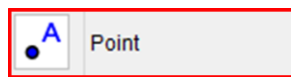
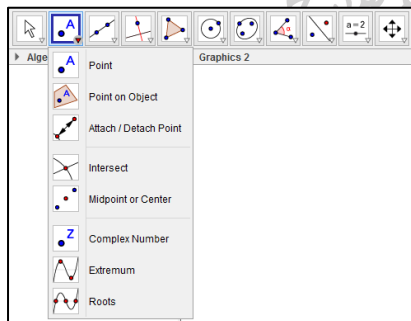


พื้นฐานของ 2D Graphics

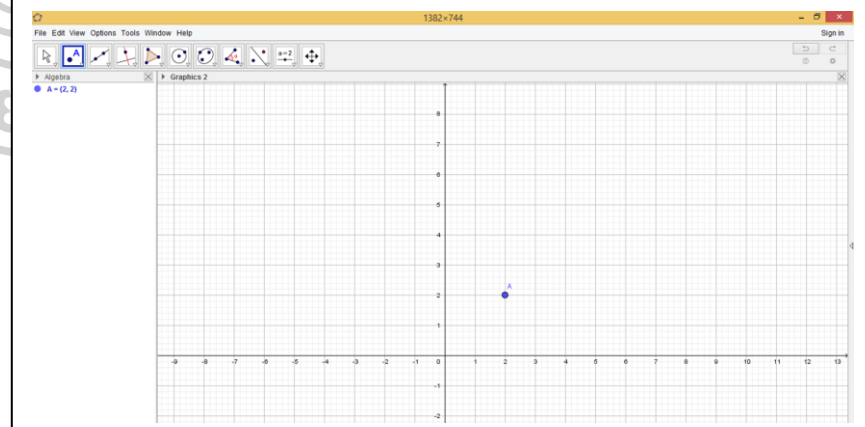
เมื่อเข้าไปที่มุมมองในรูปแบบ 2D Graphics จะเห็นกล่องเครื่องมือด้านบนของหน้าจอ ดังรูป

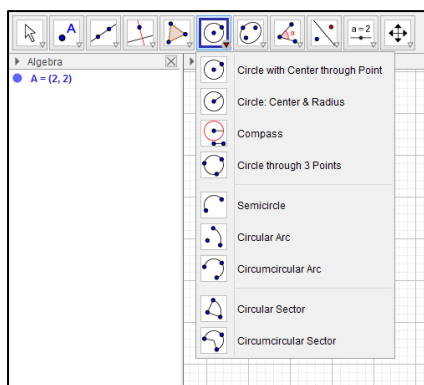


จากรูป จะเห็นกล่องเครื่องมือ 11 ประเภท ซึ่งเมื่อนักเรียนคลิกซ้ายค้างไว้ที่กล่องเครื่องมือต่างๆ จะเห็นเครื่องมือย่อยๆ ในที่นี้จะอธิบายเครื่องมือที่ใช้เรียนในเรื่อง ภาคตัดกรวย ดังนี้



ใช้สำหรับลงจุดในหน้าต่าง 2D Graphics ซึ่งเมื่อนักเรียนลงจุดใดๆ ลงไปในหน้าต่าง 2D Graphics โปรแกรมจะแสดงพิกัดของจุดนั้นๆ ลงในหน้าต่าง Algebra ดังรูป





Circle with Center through Point ใช้สำหรับวาดรูปวงกลมในหน้าต่าง 2D Graphics ซึ่งเมื่อนักเรียนวาดรูปวงกลมลงไปหน้าต่าง 2D Graphics โปรแกรมจะแสดงจุดศูนย์กลางของวงกลม จุดบนวงกลม และสมการของวงกลม ลงในหน้าต่าง Algebra ดังรูป

เมื่อนักเรียนวาดเส้นโค้ง ลงในหน้าต่าง 2D Graphics โปรแกรมจะแสดงความสัมพันธ์ที่สอดคล้องกับเส้นโค้งนั้นลงในหน้าต่าง Algebra ซึ่งทั้งสองหน้าต่างจะทำงานควบคู่กันไป อีกทั้งนักเรียนยังสามารถลงพิกัดของจุด หรือสร้างคำสั่งเพิ่มเติม โดยใช้แถบ Input ด้านล่างของจอได้ด้วย ยกตัวอย่างเช่น

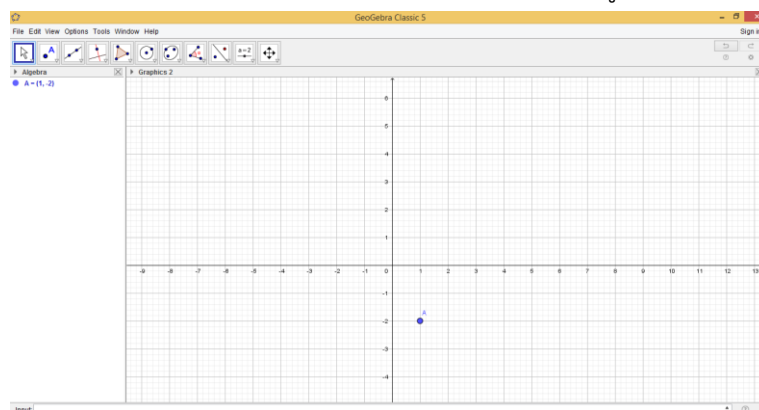
★ การลงพิกัดจุด

เช่น นักเรียนต้องการลงพิกัดจุด (1,-2) สามารถทำได้ตามขั้นตอนดังนี้

1. กรอกข้อมูล (1,-2) ลงในช่อง Input ดังรูป

Input: **(1,-2)**

2. กด Enter จะได้หน้าต่าง Algebra และ 2D Graphics ดังรูป



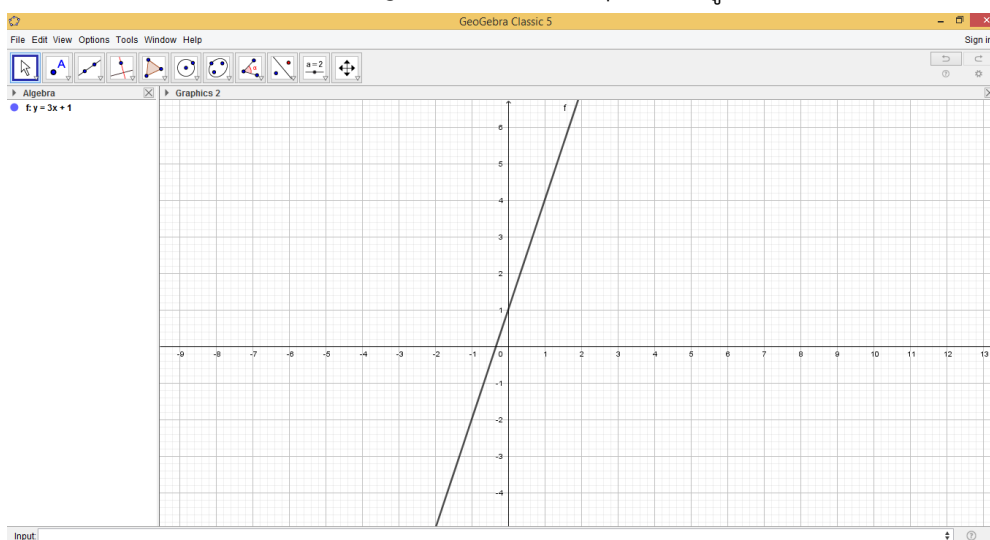
★ การวาดเส้นตรง

เช่น นักเรียนต้องการวาดกราฟของสมการเส้นตรง $y = 3x + 1$ สามารถทำได้ตามขั้นตอนดังนี้

1. กรอกข้อมูล $y = 3x + 1$ ลงในช่อง Input ดังรูป

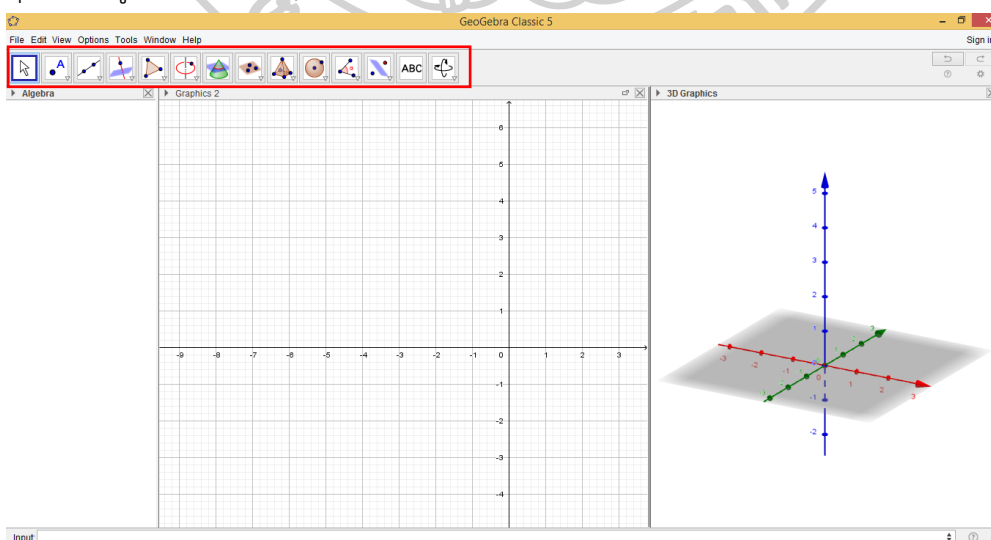
Input: $y = 3x + 1$

2. กด Enter จะได้หน้าต่าง Algebra และ 2D Graphics ดังรูป

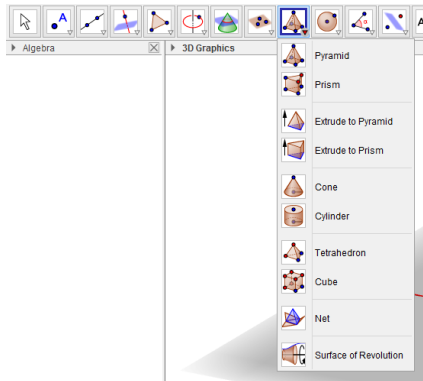


◆ เรียนรู้ 3D Graphics

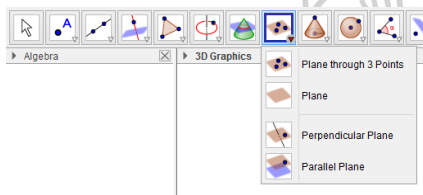
เราสามารถเข้าสู่โหมด 3D Graphics โดยการเลือก View -> 3D Graphics เมื่อเราเข้าไปที่มุมมองในรูปแบบ 3D Graphics จะเห็นกล่องเครื่องมือด้านบนของจอ



ซึ่งมีกล่องเครื่องมือเพิ่มขึ้นมา 6 ประเภท และมีเครื่องมือย่อยที่นำมาใช้เรียน ในเรื่อง ภาคตัดกรวย ดังนี้



Cone ใช้สำหรับวาดรูปกรวยในหน้าต่าง 3D Graphics ซึ่งเมื่อนักเรียนวาดรูปกรวยลงไปในหน้าต่าง 3D Graphics โปรแกรมจะแสดงจุดศูนย์กลางของวงกลม (ฐานของกรวย) จุดยอดของกรวย และพื้นที่ผิวข้างของกรวย ลงในหน้าต่าง Algebra ดังรูป



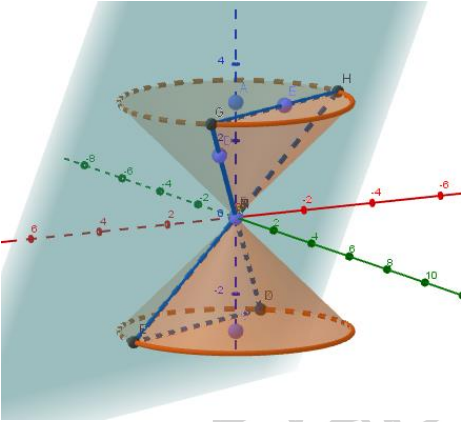
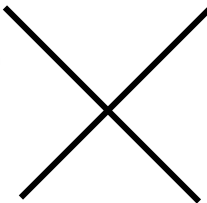

Plane through 3 Points ใช้สำหรับสร้างระนาบจากจุด 3 จุด โดยนักเรียนลงจุด 3 จุด จากนั้นคลิกเครื่องมือนี้ จะได้ระนาบที่ผ่านจุดทั้ง 3 จุด ซึ่งเมื่อนักเรียนสร้างระนาบจากจุด 3 จุด ลงไปในหน้าต่าง 3D Graphics โปรแกรมจะแสดงสมการระนาบ ลงในหน้าต่าง Algebra ดังรูป




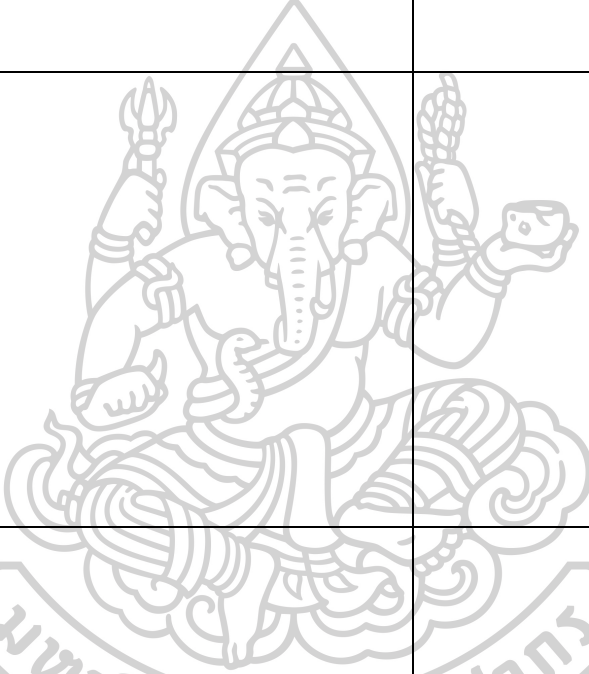

ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่

ใบงาน เรื่อง ภาคตัดกรวย

คำชี้แจง : ให้นักเรียนสังเกตรูปที่ได้จากการเลื่อนจุดสามจุดในโปรแกรม GeoGebra แล้วบันทึกผลลงในตาราง

รูปแสดงการตัดกันของระนาบกับกรวย	รูปที่เกิดจากการตัดกัน
	
	

รูปแสดงการตัดกันของระนาบกับกรวย	รูปที่เกิดจากการตัดกัน
	
	

รูปแสดงการตัดกันของระนาบกับกรวย	รูปที่เกิดจากการตัดกัน
	
	

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

รหัสวิชา ค 31202 รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2563 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์ เรื่อง ภาคตัดกรวย
ชื่อผู้สอน นางสาวพจนันท์ วัชรโทัย เวลา 4 คาบ

1. ผลการเรียนรู้

1. ใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวยในการแก้ปัญหา

2. สาระการเรียนรู้

เรขาคณิตวิเคราะห์

- วงกลม

3. สาระสำคัญ

วงกลม คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุดๆ หนึ่งที่ถูกตรึงอยู่กับที่เป็นระยะคงตัว จุดที่ถูกตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** ของวงกลม และส่วนของเส้นตรงที่มีจุดศูนย์กลางและจุดบนวงกลมใดๆ เป็นจุดปลาย เรียกว่า **รัศมี** ของวงกลม

รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และมีรัศมียาว r หน่วย คือ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K)

- นักเรียนสามารถเขียนสมการวงกลมจากจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมที่กำหนดให้ได้
- นักเรียนสามารถหาจุดศูนย์กลาง รัศมีของวงกลม และเขียนกราฟจากสมการวงกลมที่กำหนดให้ได้

ด้านทักษะกระบวนการ (P)

- นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา
- นักเรียนสามารถใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ได้
- นักเรียนสามารถให้เหตุผลเพื่อให้เกิดข้อเท็จจริง

ด้านคุณลักษณะ (A)

- นักเรียนมีวินัยในตนเอง
- นักเรียนมีความใฝ่รู้ใฝ่เรียน
- นักเรียนมีความมุ่งมั่นในการทำงาน

5. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

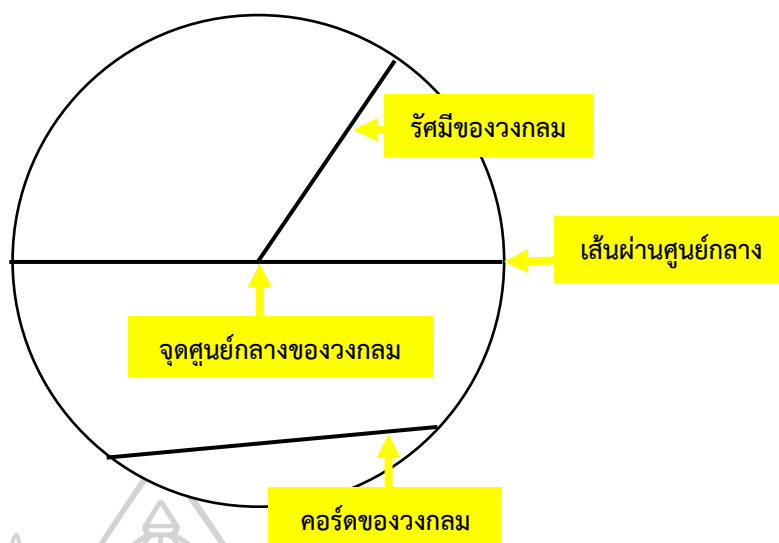
จัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน 4 คาบ โดยใช้เทคนิคการสอนแบบ KWDL ซึ่งมีขั้นตอน 4 ขั้นตอน ดังนี้

คาบที่ 1 – 2

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนความรู้เดิม เรื่อง ภาคตัดกรวยที่เรียนในครั้งที่แล้ว โดยครูบอกว่าเป้าหมายของการศึกษาครั้งนี้คือ การศึกษารอยตัดของระนาบกับกรวยโดยที่ระนาบไม่ผ่านจุดยอด ซึ่งจะได้รอยตัดเป็นรูปวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา
2. นักเรียนส่งตัวแทนมานำเสนอวิธีการตัดกันของระนาบและกรวย เพื่อให้ได้รูป วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา ตามลำดับ โดยใช้โปรแกรม GeoGebra
3. ครูวาดรูปวงกลมบนกระดานแล้วให้นักเรียนร่วมกันบอกส่วนประกอบของวงกลมที่นักเรียนรู้จักพร้อมทั้งอธิบายความหมาย

(แนวทางการตอบ: ส่วนประกอบของวงกลม ได้แก่ จุดศูนย์กลางของวงกลม รัศมีของวงกลม เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และคอร์ดของวงกลม ดังรูป)



4. ครูวาดระนาบ xy จุด $(1, 2)$ และจุด $(-5, 3)$ บนกระดาน แล้วให้นักเรียนช่วยกันหา ระยะทางระหว่างจุดทั้งสอง จากนั้นครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสูตรการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด

ขั้นสอนเนื้อหาใหม่

5. นักเรียนช่วยกันหาความสัมพันธ์ของจุดบนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ และมีรัศมียาว 2 หน่วย โดยใช้ความรู้เรื่องระยะทางระหว่างจุดสองจุด

6. นักเรียนช่วยกันหาความสัมพันธ์ของจุดบนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, 3)$ และมีรัศมียาว 2 หน่วย โดยใช้ความรู้เรื่องระยะทางระหว่างจุดสองจุด

7. นักเรียนช่วยกันหาความสัมพันธ์ของจุดบนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-2, 1)$ และมีรัศมียาว 2 หน่วย โดยใช้ความรู้เรื่องระยะทางระหว่างจุดสองจุด

8. ครูบอกนักเรียนว่าสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของจุดบนวงกลม ถูกเรียกว่า **สมการวงกลม**

9. ครูบอกนักเรียนว่า ในคาบนี้ เราจะศึกษา การหาสมการวงกลมจากจุดศูนย์กลางของวงกลมและรัศมีของวงกลมที่กำหนดให้ และการวาดกราฟของวงกลมจากสมการที่กำหนดให้

ขั้นฝึกทักษะ

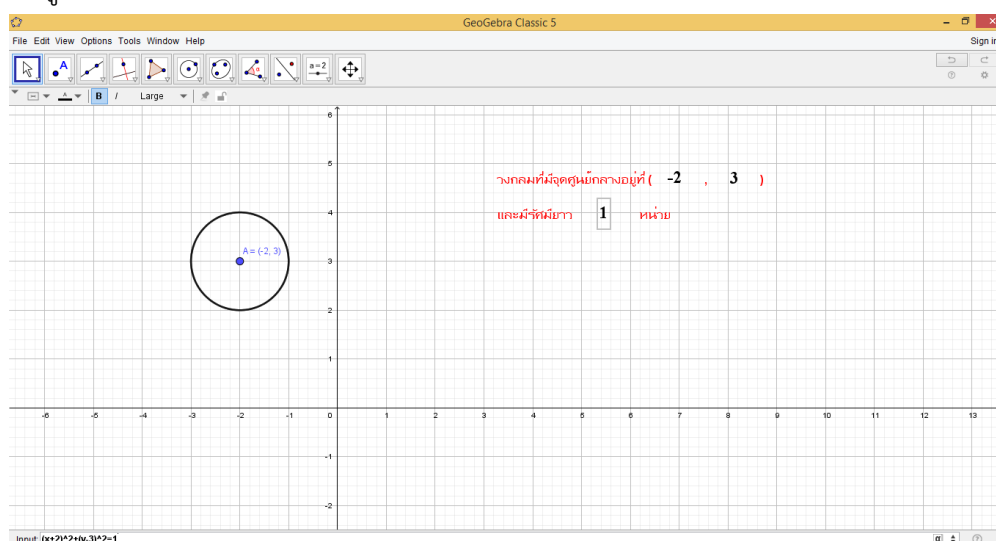
10. นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra แล้วใช้โปรแกรม GeoGebra วาดกราฟของวงกลมที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

- 1) มีจุดศูนย์กลาง $(0, 0)$ และมีรัศมียาว 2 หน่วย
- 2) มีจุดศูนย์กลาง $(0, 0)$ และมีรัศมียาว 5 หน่วย
- 3) มีจุดศูนย์กลาง $(1, -3)$ และมีรัศมียาว 2 หน่วย

- 4) มีจุดศูนย์กลาง (1, -3) และมีรัศมียาว 5 หน่วย
- 5) มีจุดศูนย์กลาง (-2, -1) และมีรัศมียาว 2 หน่วย
- 6) มีจุดศูนย์กลาง (-2, -1) และมีรัศมียาว 5 หน่วย

แล้วนำวงกลมของตนเองมาเปรียบเทียบกับเพื่อน

11. นักเรียนเปิดไฟล์ circle 2 โดยการเลือก Desktop -> Conics -> circle 1 จะได้นหน้าต่าง ดังรูป



จากนั้นนักเรียนวาดรูปวงกลมโดยใช้โปรแกรม GeoGebra จากสมการ $x^2 + y^2 = 2^2$, $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$ และ $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1^2$ และให้นักเรียนสังเกต จุดศูนย์กลางและรัศมีจากรูปวงกลมกับจำนวนที่ปรากฏในสมการ

12. กำหนดให้วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด (h,k) และมีรัศมียาว r หน่วย และนักเรียนสามารถหาได้ว่าสมการวงกลมจะอยู่ในรูป $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ โดยครูเป็นผู้ชี้แนะแนวทางจนนักเรียนได้คำตอบ

13. นักเรียนทำใบงานเรื่อง วงกลม 1 ข้อที่ 1
14. นักเรียนสลับใบงานกับเพื่อน เพื่อแลกเปลี่ยนตรวจ พร้อมกับครูเฉลยใบงาน
15. นักเรียนทำใบงานเรื่อง วงกลม 1 ข้อที่ 2 ให้เสร็จภายในคาบแล้วส่งให้ครูตรวจ

ขั้นสรุป

16. นักเรียนและครูร่วมกันสรุปว่าสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และรัศมียาว r หน่วย คือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

17. นักเรียนและครูพูดคุยเกี่ยวกับสมการวงกลมเพิ่มเติม โดยครูใช้คำถามชี้แนะ ดังนี้
 - นักเรียนคิดว่าจุดศูนย์กลางของวงกลม มีผลต่อตำแหน่งของวงกลมอย่างไร
 - ถ้าครูเปลี่ยนค่าของรัศมีของวงกลม รูปวงกลมที่ได้จะแตกต่างกันแค่ไหน

คาบที่ 3

ขั้นนำ

1. นักเรียนทบทวนความรู้เดิมในเรื่องต่างๆ โดยครูใช้วิธีการถาม – ตอบ ซึ่งมีคำถามดังนี้

1.1 สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และรัศมียาว r หน่วย คืออะไร

(แนวทางการตอบ: สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และรัศมียาว r หน่วย

คือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$)

1.2 ระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2 เมื่อกำหนดให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดในระนาบ คือเท่าใด

(แนวทางการตอบ: ระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2 เมื่อกำหนดให้ $P_1(x_1, y_1)$

และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดในระนาบจะได้ว่าระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2

$P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$)

1.3 จุดกึ่งกลางระหว่างจุด P_1 และ P_2 เมื่อกำหนดให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดในระนาบ ถ้าจุด $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 แล้ว x และ y คือเท่าใด

(แนวทางการตอบ: จุดกึ่งกลางระหว่างจุด P_1 และ P_2 เมื่อกำหนดจุด $P_1(x_1, y_1)$

และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดในระนาบ ถ้าจุด $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 แล้ว

$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ และ $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$)

ขั้นสอนเนื้อหาใหม่

2. ครูอธิบายวิธีการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL ซึ่งแบ่งเป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 K: เรารู้อะไร (What we know) นั่นคือ การหาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

ขั้นตอนที่ 2 W: เราต้องการรู้/ต้องการทราบอะไร (What we want to know)

นั่นคือ การหาสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

ขั้นตอนที่ 3 D: เราทำอะไร/อย่างไร (What we do to find out) นั่นคือ การ

ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหาตามกระบวนการ

ขั้นตอนที่ 4 L: เราเรียนรู้อะไรจากขั้นตอนที่ 3 (what we learned) นั่นคือ

คำตอบที่ได้

ขั้นฝึกทักษะ

3. นักเรียนเข้ากลุ่มตามที่ครูได้แบ่งไว้ออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4 คน (อัตราส่วน เก่ง : ปานกลาง : อ่อน = 1 : 2 : 1) จากนั้นนักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันศึกษาใบความรู้ เรื่อง วงกลม 2 โดยให้นักเรียน

ที่มีความสามารถเก่งช่วยสอนนักเรียนที่มีความสามารถปานกลางและอ่อน ซึ่งครูทำหน้าที่สังเกต
แนะนำ และให้คำปรึกษาเมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย หรือไม่เข้าใจในการหาคำตอบ

4. นักเรียนแต่ละคนทำใบงาน เรื่อง วงกลม 2 โดยให้เวลาในการลงมือปฏิบัติ 10 นาที
5. เมื่อครบ 10 นาทีแล้ว ให้นักเรียนสลับใบงานกับเพื่อนเพื่อตรวจคำตอบ พร้อมกับครูสุ่ม
นักเรียนมานำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน

ขั้นสรุป

6. นักเรียนและครูสรุปว่า วิธีการแก้โจทย์ปัญหาด้วยเทคนิค KWDL มี 4 ขั้นตอน ดังนี้
 - ขั้นตอนที่ 1 K: เรารู้อะไร (What we know) นั่นคือ การหาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้
 - ขั้นตอนที่ 2 W: เราต้องการรู้/ต้องการทราบอะไร (What we want to know)
นั่นคือ การหาสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ
 - ขั้นตอนที่ 3 D: เราทำอะไร/อย่างไร (What we do to find out) นั่นคือ การ
ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหาตามกระบวนการ
 - ขั้นตอนที่ 4 L: เราเรียนรู้้อะไรจากขั้นตอนที่ 3 (what we learned) นั่นคือ
คำตอบที่ได้

คาบที่ 4

ขั้นนำ

1. สุ่มตัวแทนนักเรียนเพื่อสอบถามเกี่ยวกับ เรื่อง ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาด้วยเทคนิค
KWDL

ซึ่งขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาด้วยเทคนิค KWDL มี 4 ขั้นตอน ดังนี้

- ขั้นตอนที่ 1 K: เรารู้อะไร (What we know) นั่นคือ การหาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้
- ขั้นตอนที่ 2 W: เราต้องการรู้/ต้องการทราบอะไร (What we want to know)
นั่นคือ การหาสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ
- ขั้นตอนที่ 3 D: เราทำอะไร/อย่างไร (What we do to find out) นั่นคือ การ
ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหาตามกระบวนการ
- ขั้นตอนที่ 4 L: เราเรียนรู้้อะไรจากขั้นตอนที่ 3 (what we learned) นั่นคือ
คำตอบที่ได้

2. ครูแจกบัตรคำที่มีโจทย์กำลังสองสมบูรณ์บรรจุอยู่ จากนั้นให้นักเรียนกระจายกำลังสอง
สมบูรณ์ตามโจทย์ที่นักเรียนได้ เมื่อทำเสร็จแล้ว ให้นักเรียนแลกเปลี่ยนกับเพื่อนในกลุ่ม แล้วดำเนินการ
กระจายกำลังสมบูรณ์ตามโจทย์ที่แลกเปลี่ยนได้ ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนได้ครบทั้ง 5 ข้อ

3. สุ่มตัวแทนนักเรียนจำนวน 2 คนออกมานำเสนอโจทย์ของตนเอง และให้นักเรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง และให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องของตนเองและของเพื่อนที่อยู่ในกลุ่มเดียวกัน พร้อมทั้งแลกเปลี่ยนเรียนรู้ และช่วยกันเติมเต็มในข้อที่สงสัย หากไม่สามารถตอบคำถามกันภายในกลุ่มได้ ครูจะเข้าไปช่วยแนะแนวทางจนได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง

ขั้นสอนเนื้อหาใหม่

4. นักเรียนศึกษาใบความรู้ เรื่อง วงกลม 3 โดยให้นักเรียนสามารถแลกเปลี่ยนเรียนรู้กันภายในกลุ่ม นักเรียนที่มีความสามารถเก่งช่วยสอนนักเรียนที่มีความสามารถปานกลางและอ่อน แต่ถ้ามีข้อถกเถียงกันในกลุ่มที่ไม่สามารถหาข้อสรุปกันเองได้ ครูจะเข้าไปทำหน้าที่แก้ไข และปรับปรุงจนได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง

ขั้นฝึกทักษะ

5. นักเรียนทำใบงาน เรื่อง วงกลม 3 โดยให้เวลาในการลงมือปฏิบัติ 20 นาที

6. เมื่อครบ 20 นาทีแล้วให้สุ่มตัวแทนนักเรียนมานำเสนอผลงาน พร้อมกับพูดคุยแลกเปลี่ยน และโต้แย้งเพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องและครบถ้วน (ในการสุ่มนักเรียนครูจะให้โอกาสนักเรียนได้แสดงออกทุกคน)

ขั้นสรุป

7. นักเรียนร่วมกันอภิปรายในการหารูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม โดยการทำตามขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาด้วยเทคนิค KWDL ซึ่งสมการทั่วไปของวงกลม จะอยู่ในรูป $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ เมื่อกำหนดให้ $a = -2h$, $b = -2k$ และ $c = (h^2 + k^2 - r^2)$

8. ให้นักเรียนไปศึกษาใบความรู้ เรื่อง โจทย์ประชันยุทธ์ ด้วยตนเอง

สื่อ/วัสดุอุปกรณ์/แหล่งเรียนรู้

1. โปรแกรม GeoGebra
2. ใบงานเรื่อง วงกลม 1
3. ใบความรู้ เรื่อง วงกลม 2
4. ใบงานเรื่อง วงกลม 2
5. ใบความรู้ เรื่อง วงกลม 3
6. ใบงานเรื่อง วงกลม 3
7. ใบความรู้ เรื่อง โจทย์ประชันยุทธ์

การวัดและประเมินผล

ประเด็นการประเมิน	เครื่องมือ	วิธีการ	เกณฑ์
ด้านความรู้ (K) - นักเรียนสามารถเขียนสมการวงกลมจากจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมที่กำหนดให้ได้ - นักเรียนสามารถหาจุดศูนย์กลาง รัศมีของวงกลม และเขียนกราฟจากสมการวงกลมที่กำหนดให้ได้	ใบงาน	การทำใบงาน	นักเรียนได้คะแนน ร้อยละ 60 ขึ้นไป
ด้านทักษะและกระบวนการ (P) - นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา - นักเรียนสามารถใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ได้ - นักเรียนสามารถให้เหตุผลเพื่อให้เกิดข้อเท็จจริง	แบบสังเกต พฤติกรรมการทำงาน	สังเกต พฤติกรรมการทำงาน	นักเรียนได้คะแนนระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ - นักเรียนมีวินัยในตนเอง - นักเรียนมีความใฝ่รู้ใฝ่เรียน - นักเรียนมีความมุ่งมั่นในการทำงาน	แบบสังเกต พฤติกรรมปฏิบัติงาน รายบุคคล	ประเมินการปฏิบัติงาน รายบุคคล	นักเรียนได้คะแนนระดับดีขึ้นไป

บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

รหัสวิชา ค31202

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

บันทึกผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผลการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

2. ปัญหาและอุปสรรคที่พบ

.....

.....

.....

.....

3. แนวทางแก้ไขปัญหาและข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางสาวพจนันท์ วัชรโรทัย)

ครูผู้สอน

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....

.....

.....

ลงชื่อ

(นายสุชาติ หุทิพย์)

ผู้อำนวยการโรงเรียนทับสะแกวิทยา

..... /..... /.....

ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่

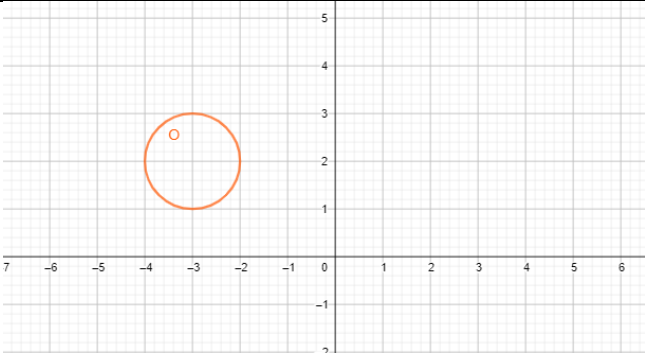
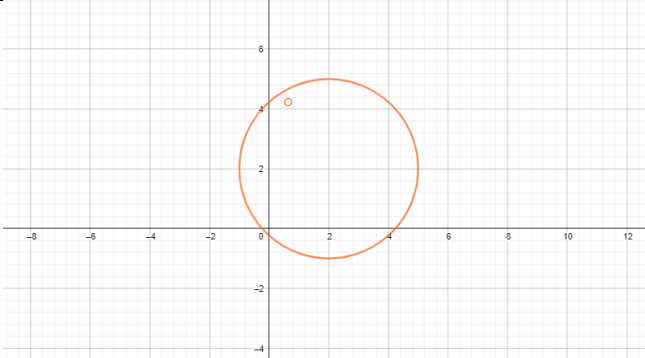
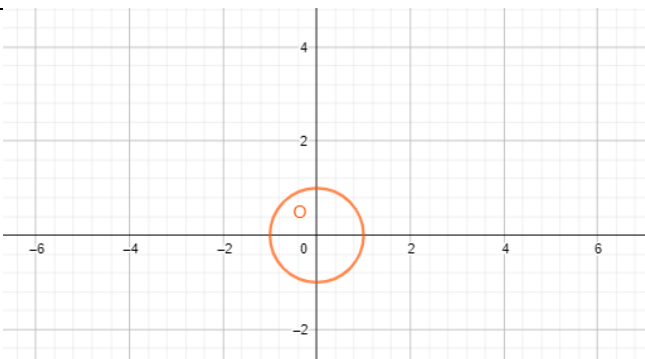


ใบงาน เรื่อง วงกลม 1

1. ให้นักเรียนจับคู่สมการวงกลม กับกราฟของวงกลมที่กำหนดให้

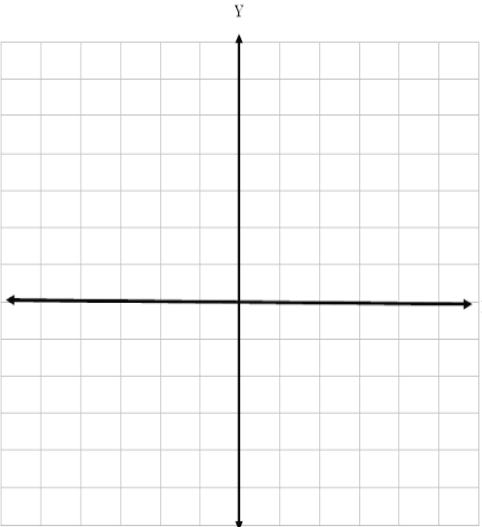
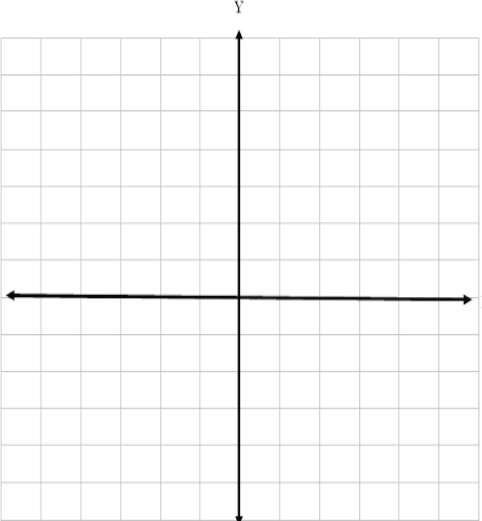
คำชี้แจง: กราฟของสมการวงกลมมีตัวอักษรภาษาอังกฤษ A - F กำกับไว้ ให้นักเรียนนำตัวอักษรมา

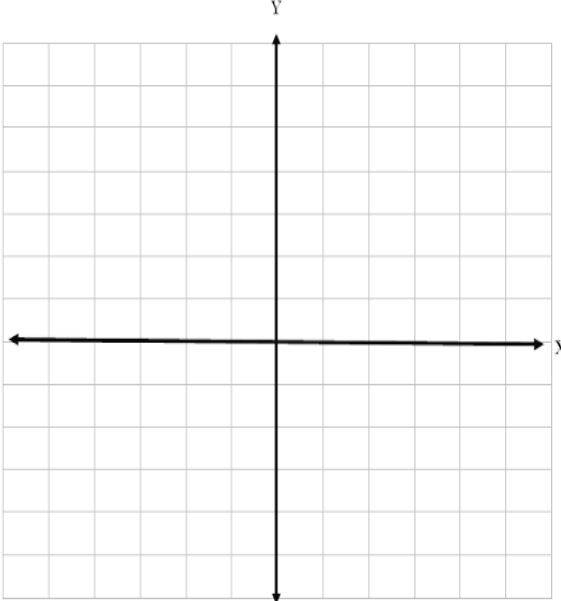
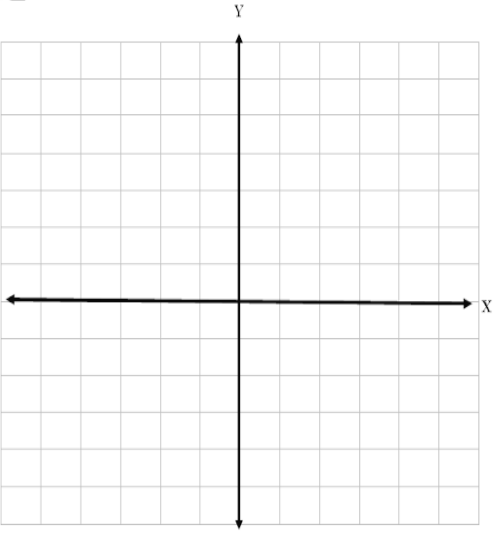
ตอบใส่ด้านล่างของสมการวงกลม โดยให้นักเรียนเขียนกราฟโดยใช้โปรแกรม GeoGebra

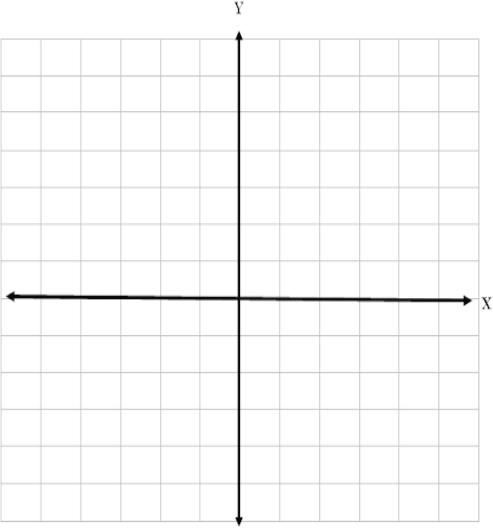
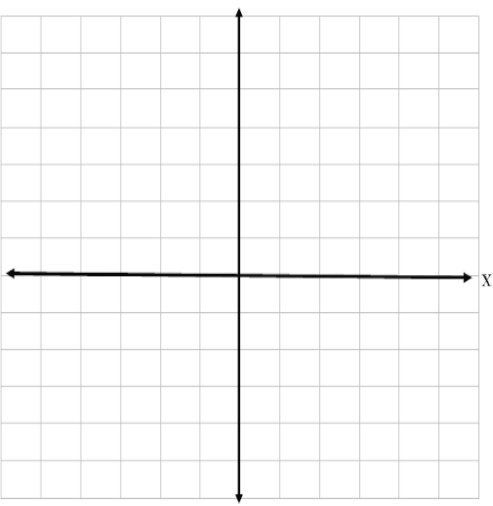
กราฟของวงกลม	สมการวงกลม
 <p style="text-align: center;">A</p>	$x^2 + y^2 = 1^2$ <p>เป็นสมการวงกลมในรูป</p> <p>.....</p>
 <p style="text-align: center;">B</p>	$x^2 + (y - 2)^2 = 3^2$ <p>เป็นสมการวงกลมในรูป</p> <p>.....</p>
 <p style="text-align: center;">C</p>	$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 1^2$ <p>เป็นสมการวงกลมในรูป</p> <p>.....</p>

กราฟของวงกลม	สมการวงกลม
<p style="text-align: center;">D</p>	$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$ <p>เป็นสมการวงกลมในรูป</p> <p>.....</p>
<p style="text-align: center;">E</p>	$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 3^2$ <p>เป็นสมการวงกลมในรูป</p> <p>.....</p>
<p style="text-align: center;">F</p>	$(x+2)^2 + (y+4)^2 = 3^2$ <p>เป็นสมการวงกลมในรูป</p> <p>.....</p>

2. ให้นักเรียนเขียนกราฟวงกลมที่จากสมการวงกลมที่กำหนดให้

สมการวงกลม	กราฟของวงกลม
$x^2 + y^2 = 3^2$	
$x^2 + (y+1)^2 = 2^2$	

สมการวงกลม	กราฟของวงกลม
$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2^2$	
$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 3^2$	

สมการวงกลม	กราฟของวงกลม
$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4^2$	
$(x+3)^2 + (y+2)^2 = 5^2$	



ใบความรู้ เรื่อง วงกลม 2

คำชี้แจง : ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้โจทย์ปัญหา โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

การหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และรัศมีของวงกลมยาว r หน่วย

สมการวงกลม

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และมีรัศมียาว r หน่วย คือ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$



ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการวงกลมที่มีรัศมียาว 3 หน่วย และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, -1)$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ รัศมีของวงกลมยาว 3 หน่วย นั่นคือ $r = 3$

และจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ $(2, -1)$ นั่นคือ $h = 2$ และ $k = -1$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหาหาสมการวงกลม

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จากสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และมีรัศมียาว r หน่วย คือ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

เมื่อแทนค่า h, k และ r ด้วย 2, -1 และ 3 ตามลำดับ


$$\text{จะได้ } (x-2)^2 + (y-(-1))^2 = 3^2$$

นั่นคือ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ เป็นสมการวงกลม

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า สมการวงกลมที่มีรัศมียาว 3 หน่วย และจุดศูนย์กลางอยู่ที่

$$(2, -1) \text{ คือ } (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

 ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, 2)$ และผ่านจุด $(3, -2)$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ $(-1, 2)$ นั่นคือ $h = -1$ และ $k = 2$
วงกลมนี้ผ่านจุด $(3, -2)$ นั่นคือ ระยะทางระหว่างจุดจุดศูนย์กลาง $(-1, 2)$ และ

จุด $(3, -2)$ คือความยาวของรัศมีของวงกลม

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหาสมการวงกลม

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

หาความยาวรัศมีของวงกลม

$$\text{จาก } r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\text{จะได้ } r = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{32}$$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และมีรัศมียาว r หน่วย คือ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

เมื่อแทนค่า h, k และ r ด้วย $-1, 2$ และ $\sqrt{32}$ ตามลำดับ


$$\text{จะได้ } (x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{32})^2$$

นั่นคือ $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 32$ เป็นรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, 2)$ และผ่านจุด

$(3, -2)$ คือ $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 32$

 ตัวอย่างที่ 3 ถ้าจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่งเป็น $(3, 7)$ และ $(5, -3)$ จงหาสมการวงกลมนี้

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ จุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมเป็น $(3, 7)$ และ $(5, -3)$

นั่นคือ จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด คือ จุดศูนย์กลางของวงกลม

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหาสมการวงกลม

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

หาจุดศูนย์กลางของวงกลม

กำหนดให้ จุด (h,k) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลาง
ระหว่างจุด $(3, 7)$ และจุด $(5, -3)$

$$\text{จะได้ว่า } h = \frac{3+5}{2} = 4$$

$$\text{และ } k = \frac{7+(-3)}{2} = 2$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด $(4, 2)$

หาความยาวรัศมีของวงกลม ในที่นี้จะหาระยะทางระหว่างจุด $(4, 2)$ และจุด $(3, 7)$

$$\text{จาก } r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\text{จะได้ } r = \sqrt{(4-3)^2 + (2-7)^2} = \sqrt{26}$$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และมีรัศมียาว r หน่วย คือ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \text{ แทนค่า } h, k \text{ และ } r \text{ ด้วย } 4, 2 \text{ และ } \sqrt{26} \text{ ตามลำดับ}$$

$$\text{จะได้ } (x-4)^2 + (y-2)^2 = \sqrt{26}^2$$

$$\text{นั่นคือ } (x-4)^2 + (y-2)^2 = 26 \text{ สมการวงกลม}$$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า สมการวงกลมที่มีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง

$$\text{เป็น } (3, 7) \text{ และ } (5, -3) \text{ คือ } (x-4)^2 + (y-2)^2 = 26$$



ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่



ใบงาน เรื่อง วงกลม 2

คำชี้แจง : ให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียด โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

1. จงหารูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่มีรัศมียาว 4 หน่วย และจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, 3)$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่ง โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่ง โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....
.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

2. จงหารูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, -3)$ และผ่านจุด $(-2, 4)$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่ง โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่ง โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....
.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....



3. ถ้าจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่งเป็น $(2, -1)$ และ $(10, 5)$ จงหารูปแบบ
มาตรฐานของสมการวงกลมนี้

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

.....

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

4. ถ้าวงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(5, -1)$ และเส้นรอบวงเท่ากับ 14π หน่วย จงหารูปแบบ
มาตรฐานของสมการวงกลมนี้

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

.....

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

5. ถ้าวงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2, 3) และมีแกน Y เป็นเส้นสัมผัส จงหารูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมนี้

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

.....

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....



บัตรคำกำลังสองสมบูรณ์

$(x-5)^2$	$(x-1)^2$	$(x-9)^2$
$(x-2)^2$	$(x-11)^2$	$(x-7)^2$
$(x-3)^2$	$(x-4)^2$	$(x-12)^2$
$(x-15)^2$	$(x-17)^2$	$(x-8)^2$
$(x-6)^2$	$(x-14)^2$	$(x-10)^2$
$(x+5)^2$	$(x+1)^2$	$(x+9)^2$
$(x+2)^2$	$(x+11)^2$	$(x+7)^2$
$(x+3)^2$	$(x+4)^2$	$(x+12)^2$
$(x+15)^2$	$(x+17)^2$	$(x+8)^2$
$(x+6)^2$	$(x+14)^2$	$(x+10)^2$



ใบความรู้ เรื่อง วงกลม 3

คำชี้แจง : ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้โจทย์ปัญหา โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

เราเขียนสมการวงกลมในรูปแบบมาตรฐาน นั่นคือ รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และรัศมียาว r หน่วย คือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ แต่สมการวงกลมสามารถเขียนในรูปแบบอื่นได้อีก ดังนี้

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

กระจายกำลังสองสมบูร์ณ จะได้

$$[x^2 - 2(x)(h) + h^2] + [y^2 - 2(y)(k) + k^2] = r^2$$

จัดรูปใหม่ จะได้

$$x^2 + y^2 + (-2h)x + (-2k)y + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

ให้ $a = -2h$, $b = -2k$ และ $c = (h^2 + k^2 - r^2)$


จะได้ว่า $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

ในกรณีที่สมการ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ มีกราฟเป็นวงกลม เรียกสมการนี้ว่า รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม เขียนอยู่ในรูป

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$



 ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมที่มีรัศมียาว 4 หน่วย และจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3, 2)$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่เราทราบบอกให้

โจทย์กำหนดให้ รัศมีของวงกลมยาว 4 หน่วย นั่นคือ $r = 4$

และจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ $(-3, 2)$ นั่นคือ $h = -3$ และ $k = 2$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่เราต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหารูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จากรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

โดยที่ $a = -2h$, $b = -2k$ และ $c = (h^2 + k^2 - r^2)$

แทนค่า h, k และ r ด้วย $-3, 2$ และ 4 ตามลำดับ เพื่อหาค่า a, b และ c

จะได้ $a = -2(-3) = 6$, $b = -2(2) = -4$ และ

$$c = ((-3)^2 + 2^2 - 4^2)$$

แทนค่า a, b และ c ลงในสมการ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$


จะได้ $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$

นั่นคือ $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ เป็นรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมนี้

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมที่มีรัศมียาว 4 หน่วย และ

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3, 2)$ คือ $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$

 ตัวอย่างที่ 2 จงหารูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมที่สัมผัสแกน X ที่จุด $(4, 0)$ และมีรัศมียาว 5 หน่วย

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่เราทราบบอกให้

โจทย์กำหนดให้ วงกลมที่สัมผัสแกน X ที่จุด $(4, 0)$ และมีรัศมียาว 5 หน่วย

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่เราต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหารูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

เนื่องจากจุดสัมผัสแกน X เป็นจุดบนเส้นรอบวง

จึงได้ว่าวงกลมที่สัมผัสแกน X ที่จุด (4, 0) และมีรัศมียาว 5 หน่วย มีได้ 2 วง คือ
วงแรกเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (4, 5)
และวงที่สองเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (4, -5)
หาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (4, 5)

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม คือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

แทนค่า r, h และ k ด้วย 5, 4 และ 5 ตามลำดับ

$$\text{จะได้ } (x-4)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

$$\text{นั่นคือ } x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$$

หาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (4, -5)

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม คือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

แทนค่า r, h และ k ด้วย 5, 4 และ -5 ตามลำดับ

$$\text{จะได้ } (x-4)^2 + (y-(-5))^2 = 5^2$$

$$\text{นั่นคือ } x^2 + y^2 - 8x + 10y + 16 = 0$$

ดังนั้น สมการวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไข คือ


$$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0 \text{ และ}$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 10y + 16 = 0$$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมที่สัมผัสแกน X ที่จุด (4, 0) และมีรัศมียาว 5 หน่วย คือ $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$ และ

$$x^2 + y^2 - 8x + 10y + 16 = 0$$

 ตัวอย่างที่ 3 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมที่มีรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมเป็น

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่เราทราบดี

เราทราบดีว่า รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมเป็น

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่เราต้องการทราบ

เราต้องการหา จุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จากรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมเป็น $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

เราจัดรูปใหม่ จะได้ $(x^2 + 2(x)(2) + 2^2) + (y^2 - 2(y)(3) + 3^2) = 2^2 + 3^2 + 3$

จัดให้อยู่ในรูปกำลังสมบูรณ์ จะได้ $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของวงกลม จะได้ $h = -2$, $k = 3$ และ $r = 4$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางวงกลม คือ $(-2, 3)$ และรัศมีของวงกลม คือ 4

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า วงกลมที่มีรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมเป็น

$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-2, 3)$ และรัศมีของ

วงกลมเป็น 4



ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่



ใบงาน เรื่อง วงกลม 3

คำชี้แจง : ให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียด โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

1. จงเขียนรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมที่มีรัศมียาว 5 หน่วย และจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, 3)$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

.....

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

2. จงเขียนรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมที่มีจุด $(1, 2)$ และ $(4, 5)$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลาง

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

.....

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

3. จงหารูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมที่สัมผัสแกน X ที่จุด $(3, 0)$ และมีรัศมียาว $\sqrt{7}$ หน่วย

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

4. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมที่มีรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมเป็น

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y - 11 = 0$$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

5. จงหาจุดศูนย์กลาง รัศมีของวงกลม และเขียนกราฟของวงกลมที่มีรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม เป็น $x^2 + y^2 + 3x + 5y - 4 = 0$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

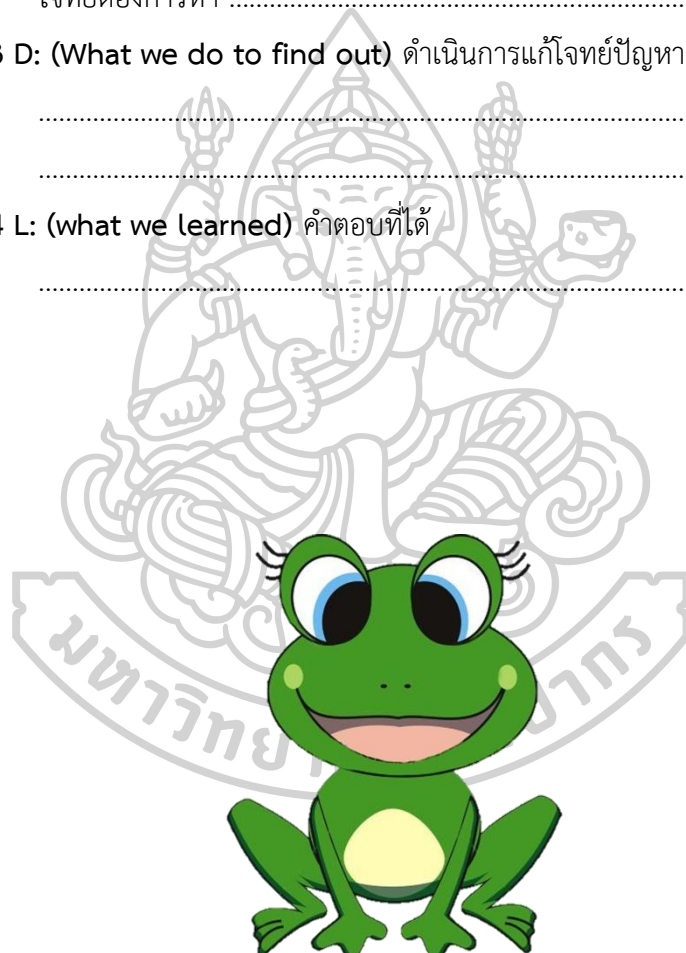
ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....



ใบความรู้ เรื่อง โจทย์ประชันยุทธ์



คำชี้แจง : ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้โจทย์ปัญหา โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

ตัวอย่างที่ 1 จงหารูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมที่ผ่านจุด $(0, 3)$, $(-4, 3)$ และ $(-3, 4)$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่ง โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ วงกลมผ่านจุด $(0, 3)$, $(-4, 3)$ และ $(-3, 4)$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่ง โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จากรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

แทนค่า x และ y ของจุดที่กำหนดให้ แล้วแก้ระบบสมการเชิงเส้น

วงกลมผ่านจุด $(0, 3)$ จะได้ $0^2 + 3^2 + a(0) + b(3) + c = 0$

$$3b + c = -9 \quad \text{----- (1)}$$

วงกลมผ่านจุด $(-4, 3)$ จะได้ $(-4)^2 + 3^2 + a(-4) + b(3) + c = 0$

$$-4a + 3b + c = -25 \quad \text{----- (2)}$$

วงกลมผ่านจุด $(-3, 4)$ จะได้ $(-3)^2 + 4^2 + a(-3) + b(4) + c = 0$

$$-3a + 4b + c = -25 \quad \text{----- (3)}$$

$$(1) - (2);$$

$$4a = 16$$

$$a = 4$$

แทนค่า $a = 4$ ใน (3) จะได้

$$4b + c = -13 \quad \text{----- (4)}$$

$$(4) - (1);$$

$$b = -4$$

แทนค่า $b = -4$ ใน (4) จะได้

$$4(-4) + c = -13 \quad \text{----- (4)}$$

$$(4) - (1);$$

$$c = 3$$


แทนค่า $a = 4$, $b = -4$ และ $c = 3$ ในสมการ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

ดังนั้น สมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมที่ผ่านจุด (0, 3), (-4, 3) และ (-3, 4)

คือ $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$

 ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 = 13$ ที่จุด (2, 3)

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมเป็น $x^2 + y^2 = 13$

เส้นสัมผัสวงกลมผ่านจุด (2, 3)

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา สมการเส้นสัมผัส

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

หาความชันของเส้นสัมผัส

จากเส้นสัมผัสวงกลมที่ผ่านจุด (2, 3) เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่ผ่านจุด (2, 3) แสดงว่า ผลคูณของความชันของรัศมีที่ผ่านจุด (2, 3) กับความชันของเส้นสัมผัสจะเท่ากับ -1

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมเป็น $x^2 + y^2 = 13$ เทียบกับ

รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม คือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

จะได้ว่า $h = 0, k = 0$ และ $r = \sqrt{13}$

แสดงว่า จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ (0, 0)

ความชันของรัศมีที่ผ่านจุด (2, 3) คือ $m = \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2}$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด (2, 3) เท่ากับ $-\frac{2}{3}$

หาสมการเส้นสัมผัส

เส้นสัมผัสมีความชัน $-\frac{2}{3}$ และผ่านจุด (2, 3)



จาก $y - y_1 = m(x - x_1)$

จะได้ $y - 3 = \left(-\frac{2}{3}\right)(x - 2)$

$$2x + 3y - 13 = 0$$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสวงกลมที่ผ่านจุด (2, 3) คือ $2x + 3y - 13 = 0$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสามารถหา สมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 = 13$ ที่จุด (2, 3) คือ

$$2x + 3y - 13 = 0$$

 **ตัวอย่างที่ 3** จงหา รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-2, 1) และสัมผัสเส้นตรงที่ผ่านจุด (-1, -3) และ (4, 3)

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่เราทราบบอกให้

โจทย์กำหนดให้ วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-2, 1) นั่นคือ $h = -2$ และ $k = 1$

และวงกลมสัมผัสเส้นตรงที่ผ่านจุด (-1, -3) และ (4, 3)

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่เราต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

หาสมการเส้นสัมผัส

จากจุด (-1, -3) และจุด (4, 3) อยู่บนเส้นตรงที่สัมผัสวงกลม

จะได้ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-3)}{4 - (-1)} = \frac{6}{5}$

ต่อไป เราจะหาเส้นตรงที่มีความชัน $\frac{6}{5}$ และผ่านจุด (4, 3)

จาก $y - y_1 = m(x - x_1)$

จะได้ $y - 3 = \frac{6}{5}(x - 4)$

$$6x - 5y - 9 = 0$$

หารัศมีของวงกลม โดยหาจากระยะทางระหว่างจุด (-2, 1) กับเส้นตรง

$$6x - 5y - 9 = 0$$

$$\text{จาก } r = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\text{จะได้ } r = \frac{|(6)(-2) - 5(1) - 9|}{\sqrt{6^2 + (-5)^2}} = \frac{26}{\sqrt{61}}$$

หารูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

$$\text{จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม คือ } (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

แทนค่า r, h และ k ด้วย $\frac{26}{\sqrt{61}}$, -2 และ 1 ตามลำดับ

$$\text{จะได้ } (x - (-2))^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{26}{\sqrt{61}}\right)^2$$

นั่นคือ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = \frac{676}{61}$ เป็นรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-2, 1)

และสัมผัสเส้นตรงที่ผ่านจุด (-1, -3) และ (4, 3) คือ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = \frac{676}{61}$



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

รหัสวิชา ค 31202 รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2563 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์ เรื่อง ภาคตัดกรวย
ชื่อผู้สอน นางสาวพจนันท์ วัชรทัย เวลา 4 คาบ

1. ผลการเรียนรู้

1. ใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวยในการแก้ปัญหา

2. สาระการเรียนรู้

เรขาคณิตวิเคราะห์

- วงรี

3. สาระสำคัญ

วงรี คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนั้นไปยังจุดตรึงอยู่กับที่สองจุดมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับทั้งสองจุดนี้ว่า **โฟกัส (focus)** ของวงรี

รูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด $(0, 0)$

- วงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน X จะมีสมการวงรีอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$

- วงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน Y จะมีสมการวงรีอยู่ในรูป $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ เมื่อ $a > b$

รูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k)

- วงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน จะมีสมการวงรีอยู่ในรูป

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

- วงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง จะมีสมการวงรีอยู่ในรูป $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K)

- นักเรียนสามารถเขียนสมการวงรีจากจุดยอดและจุดโฟกัสของวงรีที่กำหนดให้ได้
- นักเรียนสามารถหาจุดยอด จุดโฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท ความเยื้องศูนย์กลาง และเขียนกราฟจากสมการวงรีที่กำหนดให้ได้

ด้านทักษะกระบวนการ (P)

- นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา

- นักเรียนสามารถใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ได้

- นักเรียนสามารถให้เหตุผลเพื่อให้เกิดข้อเท็จจริง

ด้านคุณลักษณะ (A)

- นักเรียนมีวินัยในตนเอง

- นักเรียนมีความใฝ่รู้ใฝ่เรียน

- นักเรียนมีความมุ่งมั่นในการทำงาน

5. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

จัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน 4 คาบ ใช้เทคนิคการสอนแบบ KWDL ซึ่งมีขั้นตอน 4 ขั้นตอนดังนี้

คาบที่ 1

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนความรู้ เรื่อง รูปที่ได้จากการตัดกันของระนาบและกรวย ซึ่งได้แก่ วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา โดยใช้ใบกิจกรรมจากคาบที่ 1

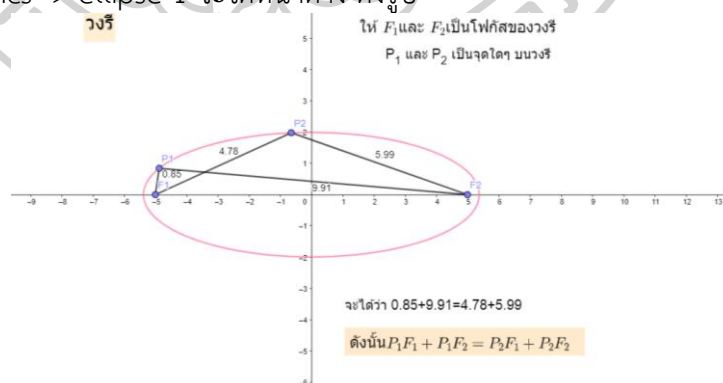
2. นักเรียนนำเสนอรูปร่างหรือรูปทรงในชีวิตประจำวันที่มีลักษณะคล้ายกับวงรี

ขั้นสอนเนื้อหาใหม่

3. ครูชี้แจงจุดประสงค์การเรียนรู้ในคาบนี้ คือ นักเรียนสามารถเขียนกราฟของวงรี และหาสมการวงรี โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ได้ และสาธิตการเปิดโปรแกรม GeoGebra เรื่อง วงรีให้นักเรียนทราบ

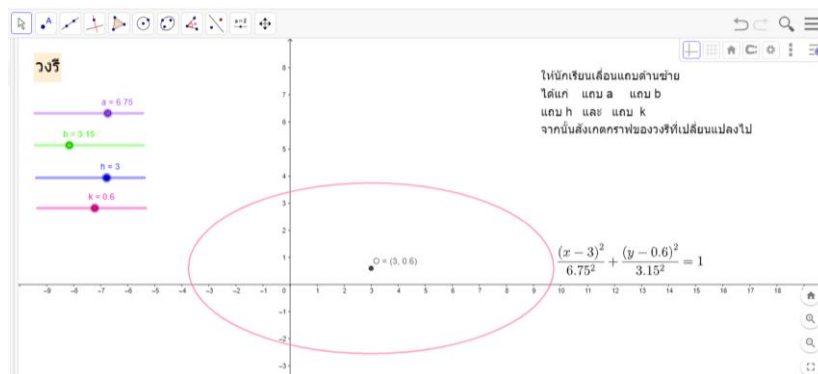
ขั้นฝึกทักษะ

4. นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra จากนั้นให้เลือกเปิดไฟล์ ellipse 1 โดยการเลือก Desktop -> Conics -> ellipse 1 จะได้นหน้าต่าง ดังรูป



5. ครูแสดงการสร้างวงรี โดยกำหนดจุดตรึงสองจุด จากนั้นครูลงจุด โดยให้ผลบวกของระยะทางระหว่างจากจุดใดๆ ไปยังจุดตรึงทั้งสองจุดนั้นมีค่าเท่ากัน จากนั้นครูสร้างรอยเดินของจุดแล้วให้นักเรียนร่วมกันสังเกตรูปที่ได้ว่ามีลักษณะอย่างไร และมีความแตกต่างจากวงกลมอย่างไร จากนั้นนักเรียนลงจุดของตนเอง โดยครูคอยดูแลติดตามตลอดการปฏิบัติ จนได้ข้อสรุปว่า เซตของจุดทั้งหมดในระนาบ ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนั้นไปยังจุดตรึงอยู่กับที่สองจุดมีค่าคงตัวเรียกว่า **วงรี** และเรียกจุดตรึงอยู่กับที่สองจุดนี้ว่า **โฟกัส** ของวงรี

6. นักเรียนเปิดไฟล์ ellipse 2 โดยการเลือก Desktop -> Conics -> ellipse 2 จะได้นหน้าต่าง ดังรูป



7. ครูแสดงการหาสมการวงรีให้นักเรียนดูเป็นตัวอย่างโดยฉายภาพทางโทรทัศน์ โดยการเปลี่ยนค่า a และ b ซึ่งครูจะสาธิตทั้ง 2 แบบ คือ แบบที่ 1 วงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน X และแบบที่ 2 วงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน Y จากนั้นครูให้นักเรียนลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง โดยให้นักเรียนอ่านค่าชี้แจงและปฏิบัติตาม นักเรียนวาดกราฟวงรี และเขียนสมการวงรีที่นักเรียนสร้างขึ้น จำนวนทั้งหมด 6 แบบลงในใบกิจกรรม

8. เมื่อนักเรียนเข้าใจขั้นตอนแล้ว ให้นักเรียนลงมือปฏิบัติ โดยให้เวลา 20 นาที และครูจะกระตุ้นให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ของค่า a และ b กราฟของวงรี และสมการของวงรีที่ได้ เมื่อครบกำหนดเวลา 20 นาทีแล้ว ตัวแทนนักเรียนจำนวน 3 คนออกมานำเสนอกราฟและสมการวงรีที่ได้

9. นักเรียนและครูร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับสมการวงรี และกราฟของวงรี จนได้ข้อสรุปว่ารูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด $(0, 0)$

วงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน X จะมีสมการวงรีอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$

วงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน Y จะมีสมการวงรีอยู่ในรูป $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ เมื่อ $a > b$

ขั้นสรุป

10. นักเรียนเขียนกราฟวงรีจากสมการวงรีที่กำหนดให้ โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ดังนี้

$$1) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$2) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$3) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$4) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

11. ครูและนักเรียนพูดคุยเกี่ยวกับสมการวงรีเพิ่มเติม โดยครูใช้คำถามชี้แนะ ดังนี้

- นักเรียนคิดว่ากราฟของวงรีในแต่ละข้อ (ในข้อที่ 9) มีความเหมือน หรือแตกต่างกันอย่างไร

- นักเรียนคิดว่าถ้าครูต้องการวงรีที่มีขนาดใกล้เคียงวงกลมที่สุด ครูต้องเปลี่ยนค่า a และ b เป็นอย่างไร
- นักเรียนคิดว่าถ้าโฟกัสทับซ้อนกัน วงรีที่วาดได้จะเป็นรูปอะไร

คาบที่ 2

ชั้นนำ

1. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนในเรื่องต่างๆ ดังนี้

- รูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด $(0, 0)$

วงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน X จะมีสมการวงรีอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$

วงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน Y จะมีสมการวงรีอยู่ในรูป $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ เมื่อ $a > b$

2. นักเรียนเสนอความคิดเห็นเกี่ยวกับ เรื่อง ความเร็วของวงรี ซึ่งในคาบที่ 1 ที่เราเรียนเรื่องวงรี โดยใช้โปรแกรม GeoGebra รูปที่นักเรียนวาดได้มีลักษณะแตกต่างกัน เช่น บางคนได้วงรีมีรูปร่างเรียวยาว (วงรีมีความรีมาก) บางคนได้วงรีมีรูปร่างเกือบจะกลม (วงรีมีความรีน้อย) โดยทั่วไปจะใช้อัตราส่วนของ c ต่อ a วัดความรีของวงรี และอัตราส่วนนี้เรียกว่า **ความเยื้องศูนย์กลาง**

ขั้นสอนเนื้อหาใหม่

3. ให้นักเรียนเข้ากลุ่มตามที่ครูได้แบ่งไว้ออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4 คน (อัตราส่วน เก่ง : ปานกลาง : อ่อน = 1 : 2 : 1) จากนั้นให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันศึกษาใบความรู้ เรื่อง วงรี 2 โดยให้นักเรียนที่มีความสามารถเก่งช่วยสอนนักเรียนที่มีความสามารถปานกลางและอ่อน ซึ่งครูทำหน้าที่สังเกตและแนะนำ เมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย

ขั้นฝึกทักษะ

4. นักเรียนทำใบงาน เรื่อง วงรี 2 โดยใช้เวลาในการลงมือปฏิบัติ 10 นาที

5. เมื่อครบ 10 นาทีแล้ว นักเรียนสลับใบงานกับเพื่อนเพื่อตรวจคำตอบ พร้อมกับครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน

ขั้นสรุป

6. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับการหารูปแบบมาตรฐานของสมการวงรีที่ โดยการทำตามขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาด้วยเทคนิค KWDL โดยครูได้เน้นย้ำเรื่องโฟกัสของวงรี ซึ่งทำให้ใช้รูปแบบมาตรฐานที่แตกต่างกัน

คาบที่ 3

ชั้นนำ

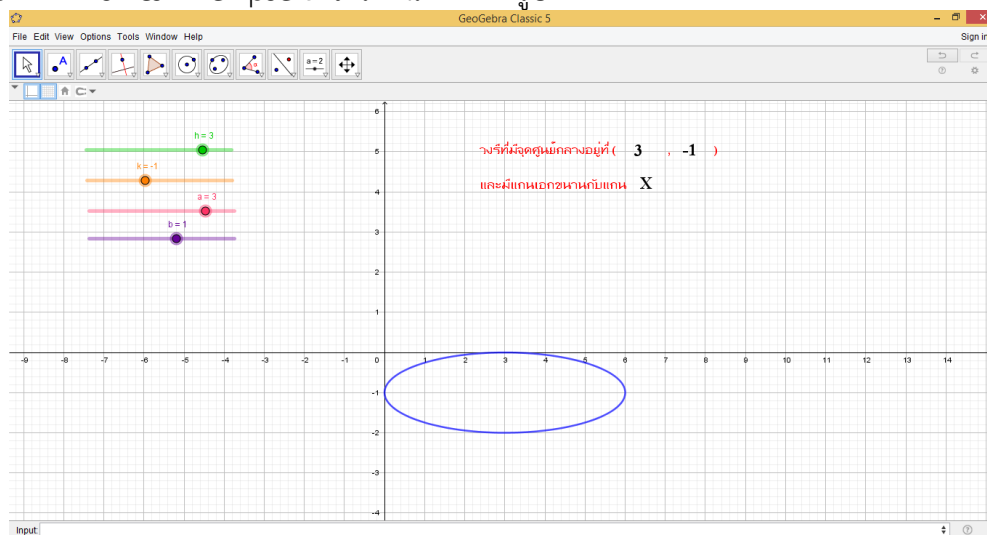
1. ครูทบทวน เรื่อง สมการวงรี ซึ่งมี 2 แบบ คือ

แบบที่ 1 วงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน X มีสมการเป็น $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$

แบบที่ 2 วงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน Y มีสมการเป็น $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ เมื่อ $a > b$

ชั้นสอนเนื้อหาใหม่

2. นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra จากนั้นให้เลือกเปิดไฟล์ ellipse 3 โดยการเลือก Desktop -> Conics -> ellipse 3 จะได้นหน้าต่าง ดังรูป



3. ครูแสดงการเลื่อนกราฟของวงรีให้นักเรียนดูเป็นตัวอย่าง โดยมีปุ่มสำหรับการเลื่อน 2 ปุ่ม คือ ปุ่ม h และ ปุ่ม k ครูจะเลื่อนไปรอบๆ ให้ครบทั้งจุดภาค จากนั้นให้นักเรียนเลื่อนกราฟ โดยใช้ เวลา 10 นาที ครูใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนสังเกตถึงสิ่งที่เปลี่ยนแปลงไปของสมการวงรีที่ได้ ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายจนได้ข้อสรุปว่า ถ้าเลื่อนวงรีที่มีสมการเป็น $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ให้จุดศูนย์กลางของวงรีไปอยู่ที่ (h, k) แล้วสมการวงรีจะอยู่ในรูป $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (แกนเอกอยู่ในแนวนอน) และถ้าเลื่อนวงรีที่มีสมการเป็น $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ให้จุดศูนย์กลางของวงรีไปอยู่ที่ (h, k) แล้วสมการวงรีจะอยู่ในรูป $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ (แกนเอกอยู่ในแนวตั้ง)

ชั้นฝึกทักษะ

4. นักเรียนเข้ากลุ่มตามที่ครูได้แบ่งไว้ออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4 คน (อัตราส่วน เก่ง : ปานกลาง : อ่อน = 1 : 2 : 1) จากนั้นให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันศึกษาใบความรู้ เรื่อง วงรี 3 โดยให้นักเรียนที่มีความสามารถเก่งช่วยสอนนักเรียนที่มีความสามารถปานกลางและอ่อน ซึ่งครูทำหน้าที่สังเกตและแนะนำ เมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย

5. นักเรียนทำใบงาน เรื่อง วงรี 3 โดยใช้เวลาในการลงมือปฏิบัติ 15 นาที

6. เมื่อครบ 15 นาทีแล้ว ให้นักเรียนสลับใบงานกับเพื่อนเพื่อตรวจคำตอบ พร้อมกับครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน

ขั้นสรุป

7. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับการเลื่อนกราฟ ถ้าเลื่อนวงรีที่มีสมการเป็น $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ให้จุดศูนย์กลางของวงรีไปอยู่ที่ (h, k) แล้วสมการวงรีจะอยู่ในรูป

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ (แกนเอกอยู่ในแนวนอน) และถ้าเส้นวงรีที่มีสมการเป็น } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

ให้จุดศูนย์กลางของวงรีไปอยู่ที่ (h, k) แล้วสมการวงรีจะอยู่ในรูป $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ (แกนเอกอยู่ในแนวตั้ง)

คาบที่ 4

ชั้นนำ

1. ครูทบทวนความรู้เรื่องเดิมของนักเรียน ดังนี้

- สมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน และมีจุดศูนย์กลางของวงรีไปอยู่ที่ (h, k)

จะอยู่ในรูป
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

- สมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง และมีจุดศูนย์กลางของวงรีไปอยู่ที่ (h, k) จะ

อยู่ในรูป
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

- การหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด เมื่อกำหนดจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ

$P_2(x_2, y_2)$ ถ้าจุด $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 แล้ว $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ และ

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

2. ตัวแทนนักเรียนแสดงการแยกตัวประกอบโดยใช้การดึงตัวร่วม และการแยกตัวประกอบ โดยใช้กำลังสองสมบูรณ์ บนกระดาน จากตัวอย่างที่ครูสร้างขึ้น

ขั้นสอนเนื้อหาใหม่

3. นักเรียนเข้ากลุ่มตามที่ครูได้แบ่งไว้ออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4 คน (อัตราส่วน เก่ง : ปานกลาง : อ่อน = 1 : 2 : 1) จากนั้นให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันศึกษาใบความรู้ เรื่อง วงรี 4 โดยให้นักเรียนที่มีความสามารถเก่งช่วยสอนนักเรียนที่มีความสามารถปานกลางและอ่อน ซึ่งครูทำหน้าที่สังเกตและแนะนำ เมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย

ขั้นฝึกทักษะ

4. นักเรียนทำใบงาน เรื่อง วงรี 4 โดยใช้เวลาในการลงมือปฏิบัติ 15 นาที

5. เมื่อครบ 15 นาทีแล้ว ให้นักเรียนสลับใบงานกับเพื่อนเพื่อตรวจคำตอบ พร้อมกับครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน

ขั้นสรุป

6. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับการหาสมการวงรี การหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท โฟกัส และความเยื้องศูนย์กลางของวงรี ซึ่งครูเน้นย้ำในเรื่องการใช้สมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน และสมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง และสิ่งที่สำคัญ คือ $a > b$ แสดงว่าให้ดู ค่า a เป็นหลักกว่าค่า b อยู่ที่ตรงไหน

6. สื่อ/วัสดุอุปกรณ์/แหล่งเรียนรู้

1. โปรแกรม Geogebra
2. ใบงาน เรื่อง วงรี 1
3. ใบความรู้ เรื่อง วงรี 2
4. ใบงาน เรื่อง วงรี 2
5. ใบความรู้ เรื่อง วงรี 3
6. ใบงาน เรื่อง วงรี 3
7. ใบความรู้ เรื่อง วงรี 4
8. ใบงาน เรื่อง วงรี 4

7. การวัดและประเมินผล

ประเด็นการประเมิน	เครื่องมือ	วิธีการ	เกณฑ์
ด้านความรู้ (K) - นักเรียนสามารถเขียนสมการวงรีจากจุดยอดและจุดโฟกัสของวงรีที่กำหนดให้ได้ - นักเรียนสามารถหาจุดยอด จุดโฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท ความเยื้องศูนย์กลาง และเขียนกราฟจากสมการวงรีที่กำหนดให้ได้	ใบงาน	การทำใบงาน	นักเรียนได้คะแนน ร้อยละ 60 ขึ้นไป
ด้านทักษะและกระบวนการ (P) - นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา - นักเรียนสามารถใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ได้ - นักเรียนสามารถให้เหตุผลเพื่อให้เกิดข้อเท็จจริง	แบบสังเกต พฤติกรรมการทำงาน	สังเกต พฤติกรรมการทำงาน	นักเรียนได้คะแนนระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ (A) - นักเรียนมีวินัยในตนเอง - นักเรียนมีความใฝ่รู้ใฝ่เรียน - นักเรียนมีความมุ่งมั่นในการทำงาน	แบบสังเกต พฤติกรรมปฏิบัติงาน รายบุคคล	ประเมินการ ปฏิบัติงาน รายบุคคล	นักเรียนได้คะแนนระดับดีขึ้นไป

บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

รหัสวิชา ค31202

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

บันทึกผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผลการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

2. ปัญหาและอุปสรรคที่พบ

.....

.....

.....

.....

3. แนวทางแก้ไขปัญหาและข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางสาวพจนันท์ วัชรโรทัย)

ครูผู้สอน

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....

.....

.....

ลงชื่อ

(นายสุชาติ หุทิพย์)

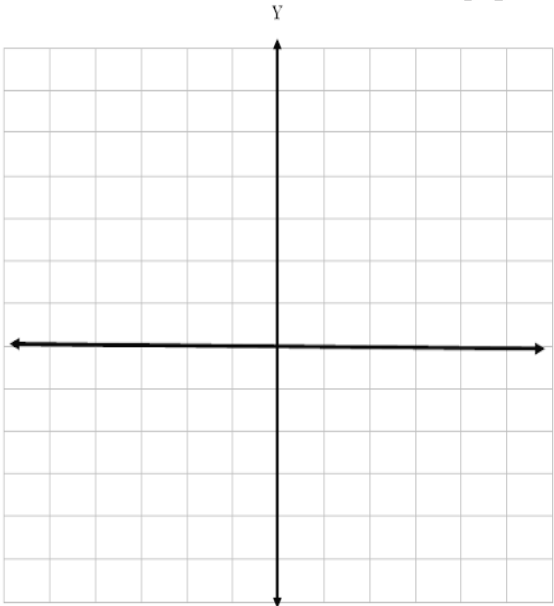
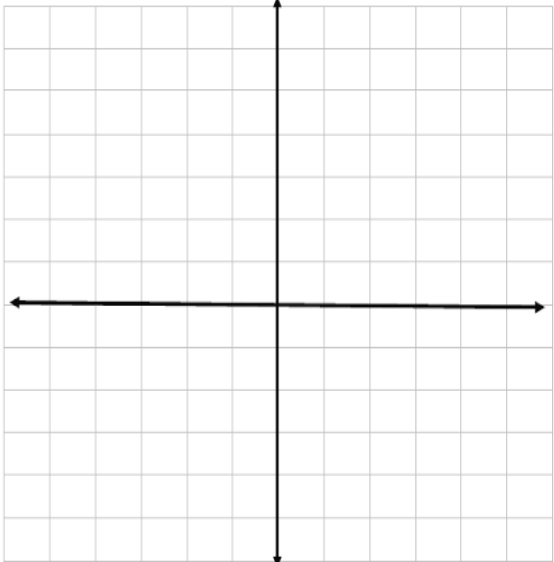
ผู้อำนวยการโรงเรียนทับสะแกวิทยา

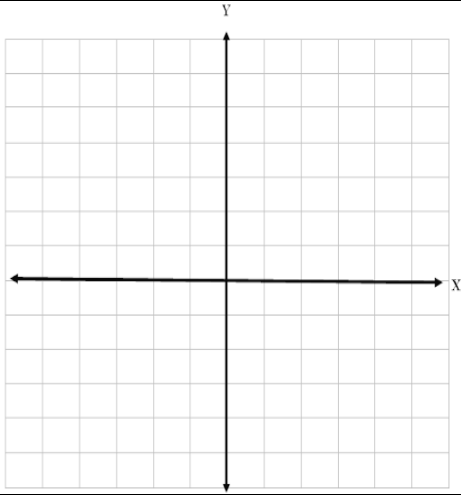
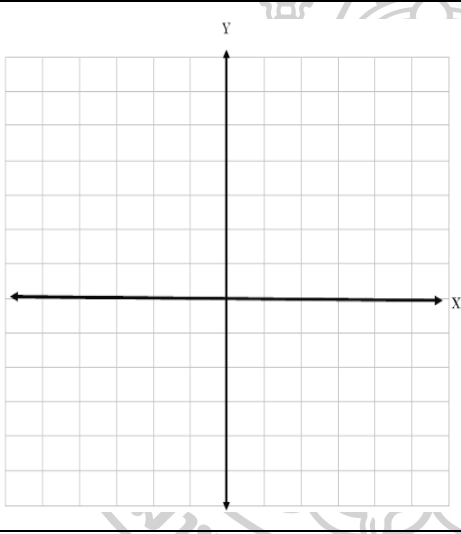
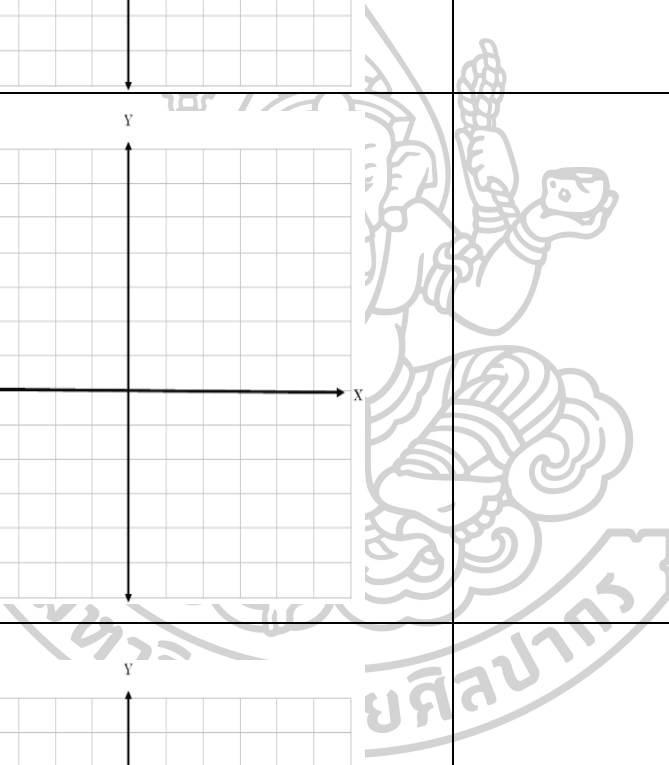
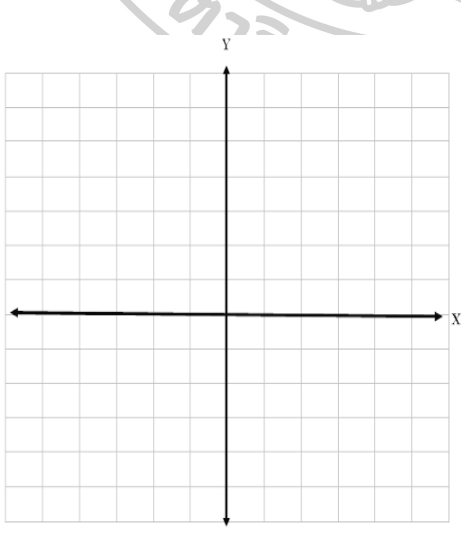
..... /..... /.....

ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่

ใบงาน เรื่อง วงรี 1

คำชี้แจง : ให้นักเรียนเขียนกราฟวงรีที่นักเรียนวาดได้ และสมการวงรีที่เกิดขึ้นจากการวาดกราฟลงในตาราง

กราฟของวงรี	สมการวงรีที่ได้
	
	

กราฟของวงรี	สมการวงรีที่ได้
	
	
	




ใบความรู้ เรื่อง วงรี 2

คำชี้แจง : ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้โจทย์ปัญหา โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

รูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0)

วงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน X จะมีสมการวงรีอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$

วงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน Y จะมีสมการวงรีอยู่ในรูป $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ เมื่อ $a > b$

 **ตัวอย่างที่ 1** วงรีวงหนึ่งมีสมการเป็น $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ จงหาโฟกัส จุดยอด ความยาวแกน

เอก ความยาวแกนโท และความเยื้องศูนย์กลางของวงรี

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ วงรีมีสมการเป็น $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหาหา โฟกัส จุดยอด ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท และความเยื้องศูนย์กลาง

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จากสมการวงรี $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของ

สมการวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้ $a^2 = 16$ และ $b^2 = 9$ นั่นคือ $a = 4$ และ $b = 3$

ทำให้ได้ว่า ความยาวแกนเอก เท่ากับ $2a = 2(4) = 8$ ความยาวแกนโท

และจุดยอดของวงรี คือ $(-4, 0)$ และ $(4, 0)$

เท่ากับ $2b = 2(3) = 6$

จาก $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$ จะได้ $c = \sqrt{7}$


และได้ว่า โฟกัสของวงรี คือ $(-\sqrt{7}, 0)$ และ $(\sqrt{7}, 0)$

จาก $e = \frac{c}{a}$ จะได้ $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$



ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า โฟกัสของวงรี คือ $(-\sqrt{7}, 0)$ และ $(\sqrt{7}, 0)$ จุดยอดของวงรี คือ $(-4, 0)$ และ $(4, 0)$ แกนเอกยาว 8 หน่วย แกนโทยาว 6 หน่วย และความเยื้องศูนย์กลาง เท่ากับ $\frac{\sqrt{7}}{4}$

 ตัวอย่างที่ 2 วงรีวงหนึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(-4, 0)$ และ $(4, 0)$ และโฟกัสอยู่ที่ $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$ จงหาสมการวงรี

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ วงรีมีจุดยอดอยู่ที่ $(-4, 0)$ และ $(4, 0)$ และโฟกัสอยู่ที่ $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา สมการวงรี

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จากโจทย์ จะได้ว่าโฟกัสของวงรีอยู่บนแกน X

แสดงว่าแกนเอกเป็นแนวนอน

จาก วงรีมีจุดยอดอยู่ที่ $(-4, 0)$ และ $(4, 0)$ จะได้ว่า $a = 4$

และจาก โฟกัสอยู่ที่ $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$ จะได้ว่า $c = 3$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $3^2 = 4^2 - b^2$ และได้ว่า $b = \sqrt{7}$

จากโฟกัสของวงรีอยู่บนแกน X แสดงว่าแกนเอกเป็นแนวนอน

จะได้ว่า รูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี คือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

แทนค่า $a = 4$ และ $b = \sqrt{7}$ จะได้ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า สมการวงรี คือ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

 ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนเอกยาว 4 หน่วย แกนโทยาว 2 หน่วย และโฟกัสอยู่บนแกน Y

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ แกนเอกยาว 4 หน่วย แกนโทยาว 2 หน่วย และโฟกัสอยู่บนแกน Y

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา สมการวงรี

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จากแกนเอกยาว 4 หน่วย จะได้ว่า $2a = 4$ นั่นคือ $a = 2$

จากแกนโทยาว 2 หน่วย จะได้ว่า $2b = 2$ นั่นคือ $b = 1$

และจากโฟกัสอยู่บนแกน Y แสดงว่าแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

จะได้ว่า รูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี คือ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

แทนค่า $a = 2$ และ $b = 1$ จะได้ $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

ดังนั้น สมการวงรี คือ $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า สมการวงรี คือ $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$



ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่



ใบงาน เรื่อง วงรี 2

คำชี้แจง : ให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียด โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

1. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท และความเยื้องศูนย์กลางของวงรี ในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$1.1 \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{49} = 1$$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้
 โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ
 โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

$$1.2 \ 25x^2 + 9y^2 = 225$$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้
 โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ
 โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

$$1.3 \quad 5x^2 + 28y^2 - 140 = 0$$

วิธีทำ

ชั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ชั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ชั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

ชั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

2. วงรีวงหนึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(-7, 0)$ และ $(7, 0)$ และมีโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(-3, 0)$ จงหาสมการวงรี

วิธีทำ

ชั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ชั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ชั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

ชั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

3. จงหาสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนเอกยาว 6 หน่วย แกนโทยาว 4 หน่วย และโฟกัสอยู่บนแกน X

วิธีทำ

ชั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ชั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

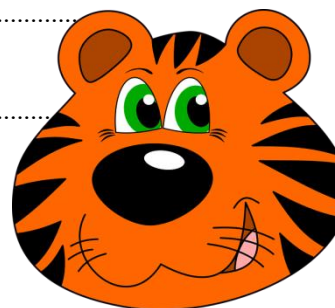
โจทย์ต้องการหา

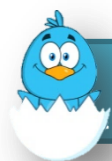
ชั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

ชั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....





ใบความรู้ เรื่อง วงรี 3

คำชี้แจง : ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้โจทย์ปัญหา โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

สมการวงรี เมื่อมีการเลื่อนกราฟ

ถ้าเลื่อนวงรีที่มีสมการเป็น $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ให้จุดศูนย์กลางของวงรีไปอยู่ที่ (h, k)

แล้วสมการวงรีจะอยู่ในรูป $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (แกนเอกอยู่ในแนวนอน)

ถ้าเลื่อนวงรีที่มีสมการเป็น $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ให้จุดศูนย์กลางของวงรีไปอยู่ที่ (h, k)

แล้วสมการวงรีจะอยู่ในรูป $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ (แกนเอกอยู่ในแนวตั้ง)

 **ตัวอย่างที่ 1** จงเขียนกราฟของวงรีที่มีสมการเป็น $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่ง โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ วงรีมีสมการเป็น $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่ง โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา กราฟของวงรี

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จาก วงรีมีสมการเป็น $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ จะได้แกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

จะได้ $h = 1$, $k = -2$, $a = 3$ และ $b = 2$

ทำให้ได้ว่า จุดศูนย์กลางของวงรีนี้อยู่ที่ $(1, -2)$

และได้ว่า จุดปลายแกนเอกอยู่ที่ $(h, k - a) = (1, -2 - 3) = (1, -5)$

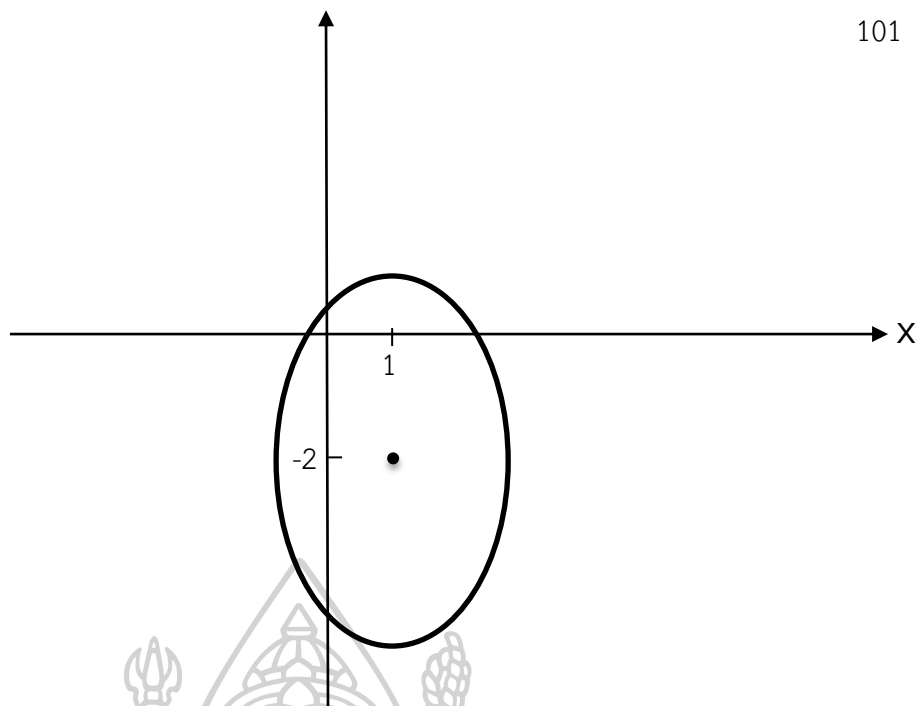
$(h, k + a) = (1, -2 + 3) = (1, 1)$

จุดปลายแกนโทอยู่ที่ $(h - b, k) = (1 - 2, -2) = (-1, -2)$

$(h + b, k) = (1 + 2, -2) = (3, -2)$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า กราฟของวงรีเป็นดังรูป



 ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด และโฟกัสของวงรีที่มีสมการเป็น

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ วงรีมีสมการเป็น $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา จุดศูนย์กลาง จุดยอด และโฟกัสของวงรี

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จาก วงรีมีสมการเป็น $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ จะได้ แกนเอกอยู่แนวนอน

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้ $h = -1$, $k = 2$, $a = 5$ และ $b = 3$

ทำให้ได้ว่า จุดศูนย์กลางของวงรีนี้อยู่ที่ $(-1, 2)$

และได้ว่า จุดยอดอยู่ที่ $(h - a, k) = (-1 - 5, 2) = (-6, 2)$

$$(h + a, k) = (-1 + 5, 2) = (4, 2)$$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 5^2 - 3^2 = 16$ นั่นคือ $c = 4$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $(h - c, k) = (-1 - 4, 2) = (-5, 2)$

$$(h + c, k) = (-1 + 4, 2) = (3, 2)$$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า จุดศูนย์กลาง คือ $(-1, 2)$ จุดยอด คือ $(-6, 2)$ และ $(4, 2)$

โฟกัส คือ $(-5, 2)$ และ $(3, 2)$



ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่

ใบงาน เรื่อง วงรี 3

คำชี้แจง : ให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียด โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

1. จงเขียนกราฟของวงรี ในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$1.1 \quad \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

$$1.2 \quad \frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

.....

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

2. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด และโฟกัสของวงรี ในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$2.1 \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

.....

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

.....

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

$$2.2 \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

.....

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

$$2.3 \frac{(x+1)^2}{6} + \frac{(y-4)^2}{5} = 1$$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

.....

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....





ใบความรู้ เรื่อง วงรี 4

คำชี้แจง : ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้โจทย์ปัญหา โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

สมการวงรี

สมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน และมีจุดศูนย์กลางของวงรีไปอยู่ที่ (h, k) จะอยู่ในรูป

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

สมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง และมีจุดศูนย์กลางของวงรีไปอยู่ที่ (h, k) จะอยู่ในรูป

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

 **ตัวอย่างที่ 1** จงหาสมการวงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(-1, 3)$ และ $(7, 3)$ และแกนโทยาว 4 หน่วย

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ วงรีมีจุดยอดอยู่ที่ $(-1, 3)$ และ $(7, 3)$ และแกนโทยาว 4 หน่วย

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา สมการของวงรี

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จากวงรีมีจุดยอดอยู่ที่ $(-1, 3)$ และ $(7, 3)$ แสดงว่าจุดศูนย์กลางของวงรี คือ

จุดกึ่งกลางระหว่างจุด $(-1, 3)$ และจุด $(7, 3)$

จะได้ว่า จุดศูนย์กลางของวงรี อยู่ที่ $\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{3+3}{2}\right) = (3, 3)$

และความยาวแกนเอก $2a = 8$ นั่นคือ $a = 4$

จากแกนโทยาว 4 หน่วย จะได้ว่า $2b = 4$ นั่นคือ $b = 2$

และจากวงรีมีจุดยอดอยู่ที่ $(-1, 3)$ และ $(7, 3)$ แสดงว่า แกนเอกอยู่ในแนวนอน

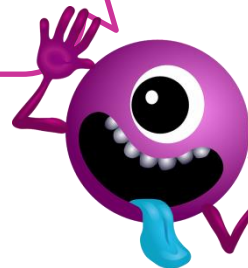
แทนค่า $h = 3, k = 3, a = 4$ และ $b = 2$ ลงใน $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$


จะได้ สมการวงรี คือ $\frac{(x-3)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1$ หรือ

$$x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 29 = 0$$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า สมการวงรี คือ $x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 29 = 0$



 ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่ (3, 2) และ (3, 8) และมีความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ

$$\frac{6}{7}$$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ วงรีมีโฟกัสอยู่ที่ (3, 2) และ (3, 8) และมีความเยื้องศูนย์กลาง

$$\text{เท่ากับ } \frac{6}{7}$$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา สมการของวงรี

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จากวงรีมีโฟกัสอยู่ที่ (3, 2) และ (3, 8) แสดงว่าจุดศูนย์กลางของวงรี คือ จุดกึ่งกลางระหว่างจุด (3, 2) และ (3, 8)

$$\text{จะได้ว่า จุดศูนย์กลางของวงรี อยู่ที่ } \left(\frac{3+3}{2}, \frac{2+8}{2} \right) = (3, 5) \text{ และ } c = 3$$

$$\text{จากความเยื้องศูนย์กลาง } e = \frac{c}{a} \text{ จะได้ } \frac{6}{7} = \frac{3}{a}$$

$$\text{นั่นคือ } a = \frac{7}{2}$$

$$\text{จาก } c^2 = a^2 - b^2 \text{ จะได้ } 3^2 = \left(\frac{7}{2} \right)^2 - b^2 \text{ นั่นคือ } b = \frac{\sqrt{13}}{2}$$


และจากวงรีมีจุดยอดอยู่ที่ (3, 2) และ (3, 8) แสดงว่า แกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

$$\text{แทนค่า } h = 3, k = 5, a = \frac{7}{2} \text{ และ } b = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ ลงใน } \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\text{จะได้ สมการวงรี คือ } \frac{(x-3)^2}{\left(\frac{\sqrt{13}}{2} \right)^2} + \frac{(y-5)^2}{\left(\frac{7}{2} \right)^2} = 1$$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

$$\text{เราสรุปได้ว่า สมการวงรี คือ } \frac{(x-3)^2}{\left(\frac{\sqrt{13}}{2} \right)^2} + \frac{(y-5)^2}{\left(\frac{7}{2} \right)^2} = 1$$

 ตัวอย่างที่ 3 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด และโฟกัสของวงรีที่มีสมการเป็น $16x^2 + y^2 - 96x + 8y + 144 = 0$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) ที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ วงรีมีสมการเป็น $16x^2 + y^2 - 96x + 8y + 144 = 0$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งทีโจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา จุดศูนย์กลาง จุดยอด และโฟกัสของวงรี

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จาก $16x^2 + y^2 - 96x + 8y + 144 = 0$

จะได้ $(16x^2 - 96x) + (y^2 + 8y) + 144 = 0$

$$16(x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) + 144 = 0$$

$$16(x^2 - 2(x)(3) + 3^2) + (y^2 + 2(y)(4) + 4^2) - 16(3^2) - 4^2 + 144 = 0$$

$$16(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4^2$$

$$(x-3)^2 + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

จากสมการ $(x-3)^2 + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$ จะได้ว่าสมการวงรีที่ได้มีแกนเอกเป็นแนวตั้ง

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

จะได้ว่า $h = 3, k = -4, a = 4$ และ $b = 1$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 4^2 - 1^2$ นั่นคือ $b = \sqrt{15}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงรี คือ $(3, -4)$

จุดยอด คือ $(h, k - a) = (3, -4 - 4) = (3, -8)$

$$(h, k + a) = (3, -4 + 4) = (3, 0)$$

โฟกัส คือ $(h, k - c) = (3, -4 - \sqrt{15})$

$$(h, k + c) = (3, -4 + \sqrt{15})$$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า จุดศูนย์กลางของวงรี คือ $(3, -4)$

จุดยอด คือ $(h, k - a) = (3, -4 - 4) = (3, -8)$

$$(h, k + a) = (3, -4 + 4) = (3, 0)$$

โฟกัส คือ $(h, k - c) = (3, -4 - \sqrt{15})$

$$(h, k + c) = (3, -4 + \sqrt{15})$$



ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่



ใบงาน เรื่อง วงรี 4

คำชี้แจง : ให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียด โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

1. จงหาสมการวงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(-5, -2)$ และ $(7, -2)$ และแกนโทยาว 4 หน่วย

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

2. จงหาสมการวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่ $(1, -2)$ และ $(1, 4)$ และมีความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{3}{4}$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ชั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ชั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

3. จงหาสมการของวงรีที่ผ่านจุด $(-2, 2)$, $(2, 5)$, $(6, 2)$ และ $(2, -1)$

วิธีทำ

ชั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

.....

ชั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ชั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ชั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

4. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด และโฟกัสของวงรีที่มีสมการเป็น
 $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y - 116 = 0$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

.....

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

5. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด และโฟกัสของวงรีที่มีสมการเป็น
 $5x^2 + 13y^2 - 50x + 26y + 112 = 0$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

.....

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

รหัสวิชา ค 31202 รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2563 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์ เรื่อง ภาคตัดกรวย
 ชื่อผู้สอน นางสาวพจนันท์ วัชรโรทัย เวลา 4 คาบ

1. ผลการเรียนรู้

1. เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ในการแก้ปัญหา

2. สาระการเรียนรู้

เรขาคณิตวิเคราะห์

- พาราโบลา

3. สาระสำคัญ

พาราโบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งห่างจากจุดที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่งและเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **โฟกัส** ของพาราโบลา และเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่นี้ เรียกว่า **เส้นบังคับ** หรือ **เส้นไดเรกทริกซ์** ของพาราโบลา

รูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0)

- พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง มีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $x^2 = 4py$

- พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน มีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $y^2 = 4px$

รูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k)

- พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง มีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

- พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน มีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K)

- นักเรียนสามารถหาสมการพาราโบลาได้
- นักเรียนสามารถหาจุดยอด โฟกัส ความยาวเลตัสเรกตัม และไดเรกทริกซ์จากสมการพาราโบลาที่กำหนดให้ได้

ด้านทักษะกระบวนการ (P)

- นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา
- นักเรียนสามารถใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ได้
- นักเรียนสามารถให้เหตุผลเพื่อให้เกิดข้อเท็จจริง
- นักเรียนสามารถเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์เข้ากับชีวิตประจำวัน

ด้านคุณลักษณะ (A)

- นักเรียนมีวินัยในตนเอง
- นักเรียนมีความใฝ่รู้ใฝ่เรียน
- นักเรียนมีความมุ่งมั่นในการทำงาน

5. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

จัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน 4 คาบ ใช้เทคนิคการสอนแบบ KWDL ซึ่งมีขั้นตอน 4 ขั้นตอน ดังนี้

คาบที่ 1

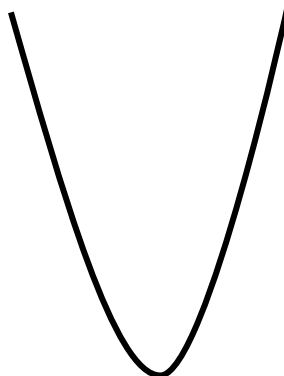
ขั้นนำ

1. ครูทบทวนความรู้ เรื่อง พาราโบลา ซึ่งเป็นฟังก์ชันกำลังสองที่นักเรียนเคยได้ศึกษามาบ้างแล้ว โดยครูยกตัวอย่างบนกระดานแล้วให้นักเรียนเขียนกราฟลงสมุด ดังนี้

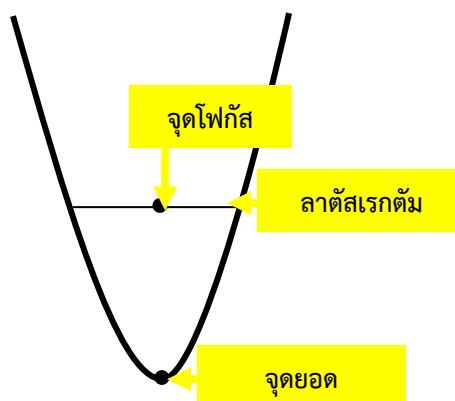
- $y = x^2$
- $y = -x^2$
- $y = x^2 - 4$
- $y = -x^2 + 3$
- $y = 2x^2 + 1$
- $y = -2x^2 + 1$

จากนั้นครูขอตัวแทนนักเรียนออกมานำเสนอกราฟของพาราโบลาที่ได้ แล้วให้นักเรียนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง

2. ครูวาดกราฟของพาราโบลาบนกระดานแล้วให้นักเรียนร่วมกันบอกส่วนประกอบของพาราโบลาที่นักเรียนรู้จัก



(แนวทางการตอบ: ส่วนประกอบของพาราโบลา ได้แก่ จุดยอด จุดโฟกัส และลาตัสเรกตัม ดังรูป)



ชั้นสอนเนื้อหาใหม่

3. ครูชี้แจงจุดประสงค์การเรียนรู้ในคาบนี้ คือ นักเรียนสามารถเขียนกราฟของพาราโบลา และหาสมการพาราโบลา โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ได้

4. นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra แล้วใช้โปรแกรม GeoGebra วาดกราฟของพาราโบลา ที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

- 1) มีจุดยอดอยู่ที่ (0, 0) จุดโฟกัสอยู่ที่ (2, 0) และลาตัสเรกตัมยาว 2 หน่วย
- 2) มีจุดยอดอยู่ที่ (0, 0) จุดโฟกัสอยู่ที่ (2, 0) และลาตัสเรกตัมยาว 4 หน่วย
- 3) มีจุดยอดอยู่ที่ (0, 0) จุดโฟกัสอยู่ที่ (-2, 0) และลาตัสเรกตัมยาว 2 หน่วย
- 4) มีจุดยอดอยู่ที่ (0, 0) จุดโฟกัสอยู่ที่ (-2, 0) และลาตัสเรกตัมยาว 4 หน่วย

แล้วนำกราฟของพาราโบลาของตนเองมาเปรียบเทียบกับเพื่อน

5. นักเรียนสังเกต จุดยอด จุดโฟกัส และความยาวของลาตัสเรกตัมจากที่ครูกำหนดให้กับ กราฟของพาราโบลาที่ได้

6. นักเรียนวาดกราฟพาราโบลาโดยใช้โปรแกรม GeoGebra จากสมการ $y = x^2$, $y = 4x^2$, $y = -4x^2$ และ $y = -\frac{1}{4}x^2$ และนักเรียนสังเกต จุดโฟกัส และความยาวลาตัสเรกตัมจาก กราฟพาราโบลากับจำนวนที่ปรากฏในสมการ โดยมีครูเป็นผู้ชี้แนะแนวทาง

ชั้นฝึกทักษะ

7. นักเรียนทำใบงานเรื่อง พาราโบลา 1 โดยใช้เวลา 15 นาที และเมื่อครบ 15 นาที ให้ นักเรียนสลับใบงานกับเพื่อน เพื่อแลกเปลี่ยนตรวจ พร้อมกับครูเฉลยใบงาน

ชั้นสรุป

8. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับสมการพาราโบลา และกราฟของพาราโบลา จน ได้ข้อสรุปว่า ในการหารูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา จะแบ่งเป็น 2 แบบ คือ

แบบที่ 1 แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐานคือ $x^2 = 4py$

แบบที่ 2 แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐานคือ $y^2 = 4px$

9. ครูและนักเรียนพูดคุยเกี่ยวกับพาราโบลาเพิ่มเติม โดยครูใช้คำถามชี้แนะ ดังนี้

- นักเรียนคิดว่ากราฟของพาราโบลาในแต่ละข้อ (ในข้อที่ 9) มีความเหมือน หรือ แตกต่างกันอย่างไร

- นักเรียนคิดว่าในการวาดกราฟ ถ้าต้องวาดด้วยมือ อันดับแรกที่เราควรทำคือสิ่งใด

คาบที่ 2

ชั้นนำ

1. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนในเรื่องต่างๆ ดังนี้

- รูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา จะแบ่งเป็น 2 แบบ คือ

แบบที่ 1 แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $x^2 = 4py$

แบบที่ 2 แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $y^2 = 4px$

2. นักเรียนตอบคำถาม เรื่อง ความกว้างของพาราโบลา ซึ่งในคาบที่แล้วที่เราได้เรียนวาดกราฟพาราโบลาโดยใช้โปรแกรม GeoGebra รูปที่นักเรียนวาดได้มีลักษณะแตกต่างกัน เช่น บางคนได้พาราโบลาที่มีลักษณะบาน (พาราโบลามีความกว้างมาก) บางคนได้พาราโบลาที่มีลักษณะแคบ (พาราโบลามีความกว้างน้อย) โดยทั่วไป จะใช้ความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนของพาราโบลา และผ่านโฟกัสของพาราโบลา และส่วนของเส้นตรงนี้เรียกว่า **เลตส์เรกตัม**

ขั้นสอนเนื้อหาใหม่

4. นักเรียนเข้ากลุ่มตามที่ครูได้แบ่งไว้ออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4 คน (อัตราส่วน เก่ง : ปานกลาง : อ่อน = 1 : 2 : 1) จากนั้นให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันศึกษาใบความรู้ เรื่อง พาราโบลา 2 โดยให้นักเรียนที่มีความสามารถเก่งช่วยสอนนักเรียนที่มีความสามารถปานกลางและอ่อน ซึ่งครูทำหน้าที่สังเกตและแนะนำ เมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย

ขั้นฝึกทักษะ

5. นักเรียนทำใบงาน เรื่อง พาราโบลา 2 โดยใช้เวลาลงมือปฏิบัติ 10 นาที

6. เมื่อครบ 10 นาทีแล้ว นักเรียนสลับใบงานกับเพื่อนเพื่อตรวจคำตอบ พร้อมกับครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน

ขั้นสรุป

7. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับการหาสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา โดยการทำตามขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาด้วยเทคนิค KWDL โดยครูได้เน้นย้ำเรื่อง การแก้สมการ โดยเฉพาะในเรื่องนี้มีเครื่องหมายลบในการคำนวณด้วย และความยาว มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 เสมอ (ไม่มีค่าเป็นลบ)

คาบที่ 3

ชั้นนำ

1. ครูทบทวน เรื่อง สมการพาราโบลา จะแบ่งเป็น 2 แบบ คือ

แบบที่ 1 แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $x^2 = 4py$

แบบที่ 2 แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $y^2 = 4px$

ขั้นสอนเนื้อหาใหม่

2. นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra แล้วใช้โปรแกรม GeoGebra วาดกราฟของพาราโบลา ที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1) มีจุดยอดอยู่ที่ (0, 0) จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, 3) และลาตส์เรกตัมยาว 2 หน่วย

2) มีจุดยอดอยู่ที่ (3, 0) จุดโฟกัสอยู่ที่ (3, 3) และลาตส์เรกตัมยาว 2 หน่วย

- 3) มีจุดยอดอยู่ที่ $(-3, 0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-3, 3)$ และลาตัสเรกตัมยาว 2 หน่วย
- 4) มีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-2, 0)$ และลาตัสเรกตัมยาว 2 หน่วย
- 5) มีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 4)$ จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-2, 4)$ และลาตัสเรกตัมยาว 2 หน่วย
- 6) มีจุดยอดอยู่ที่ $(0, -4)$ จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-2, -4)$ และลาตัสเรกตัมยาว 2 หน่วย

แล้วนำกราฟของพาราโบลาของตนเองมาเปรียบเทียบกับเพื่อน

3. ให้นักเรียนสังเกต จุดยอด จุดโฟกัส และความยาวของลาตัสเรกตัมจากที่ครูกำหนดให้กับกราฟของพาราโบลาที่ได้ โดยครูเป็นผู้ชี้แนะแนวทาง

4. นักเรียนวาดกราฟพาราโบลาโดยใช้โปรแกรม GeoGebra จากสมการ $(x-2)^2 = 4(y-1)$, $(x+1)^2 = 4(y-3)$, $(y-2)^2 = 4(x-)$ และ $(y+2)^2 = 4(x+3)$ และนักเรียนร่วมกันสังเกต จุดยอด จุดโฟกัส และความยาวของลาตัสเรกตัมจากกราฟพาราโบลาที่จำนวนที่ปรากฏในสมการ

5. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายจนได้ข้อสรุปว่า

แบบที่ 1 แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $x^2 = 4py$ เมื่อเลื่อนจุดยอดของพาราโบลาไปอยู่ที่จุด (h, k) สมการพาราโบลาจะได้เป็น $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

แบบที่ 2 แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $y^2 = 4px$ เมื่อเลื่อนจุดยอดของพาราโบลาไปอยู่ที่จุด (h, k) สมการพาราโบลาจะได้เป็น $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

6. ให้นักเรียนเข้ากลุ่มตามที่ครูได้แบ่งไว้ออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4 คน (อัตราส่วน เก่ง : ปานกลาง : อ่อน = 1 : 2 : 1) จากนั้นให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันศึกษาใบความรู้ เรื่อง พาราโบลา 3 โดยให้นักเรียนที่มีความสามารถเก่งช่วยสอนนักเรียนที่มีความสามารถปานกลางและอ่อน ซึ่งครูทำหน้าที่สังเกตและแนะนำ เมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย

ขั้นฝึกทักษะ

7. นักเรียนทำใบงาน เรื่อง พาราโบลา 3 โดยใช้เวลาลงมือปฏิบัติ 15 นาที

8. เมื่อครบ 15 นาทีแล้ว นักเรียนสลับใบงานกับเพื่อนเพื่อตรวจคำตอบ พร้อมกับครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน

ขั้นสรุป

9. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับสมการของพาราโบลา การหาจุดยอด โฟกัส ไตเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) มี 2 แบบ คือ

แบบที่ 1 แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง มีสมการพาราโบลา คือ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

แบบที่ 2 แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน มีสมการพาราโบลา คือ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

คาบที่ 4

ชั้นนำ

1. ครูทบทวน เรื่อง สมการพาราโบลา จะแบ่งเป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 จุดศูนย์กลางของพาราโบลาอยู่ที่จุดกำเนิด $(0, 0)$

แบบที่ 1 แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง มีสมการพาราโบลา คือ $x^2 = 4py$

แบบที่ 2 แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน มีสมการพาราโบลา คือ $y^2 = 4px$

กรณีที่ 2 จุดศูนย์กลางของพาราโบลาอยู่ที่ (h, k)

แบบที่ 1 แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง มีสมการพาราโบลา คือ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

แบบที่ 2 แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน มีสมการพาราโบลา คือ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

ขั้นสอนเนื้อหาใหม่

2. ครูกล่าวถึงเตารั้งสี่แสงอาทิตย์ ซึ่งเป็นสิ่งก่อสร้างที่ออกแบบโดยการนำกระจกมาเรียงต่อกันเป็นจานสะท้อนทรงพาราโบลา (ขยายความ ทรงพาราโบลาเกิดจากการหมุนพาราโบลารอบแกนสมมาตรมีภาคตัดขวางที่ผ่านแกนสมมาตรเป็นพาราโบลา ถ้าให้แหล่งกำเนิดแสงอยู่ที่โฟกัสของทรงพาราโบลา โดยทรงพาราโบลามีพื้นผิวด้านในที่สะท้อนแสง แล้วแสงจะสะท้อนจากพื้นผิวเป็นลำแสงขนาน ในทางกลับกันแสงที่พุ่งเข้ามายังพื้นผิวของทรงพาราโบลาในทิศทางที่ขนานกับแกนสมมาตรของทรงพาราโบลา แสงจะสะท้อนจากพื้นผิวไปรวมกันที่โฟกัส -> ดังจะเห็นได้จากการสาธิตในโปรแกรม GeoGebra) จากสมบัติการสะท้อนของพาราโบลา ทำให้แสงอาทิตย์รวมอยู่ที่โฟกัส ซึ่งมีอุณหภูมิได้สูงถึง 3,500 องศาเซลเซียส พลังงานแสงอาทิตย์ที่ได้นี้ก็นำมาใช้ในการผลิตไฟฟ้า การหลอมเหล็ก การผลิตเชื้อเพลิงไฮโดรเจน (เปิด VDO ประกอบ) และอีกสิ่งหนึ่งที่สำคัญ คือ Parabolic Aluminized Reflector Lamp เป็นโคมไฟแบบหนึ่งที่มีลักษณะเป็นผิวโค้งทรงพาราโบลา จากสมบัติการสะท้อนของพาราโบลา เมื่อให้จุดกำเนิดแสงอยู่ตรงโฟกัส แสงจะตกกระทบพื้นผิว แล้วจะสะท้อนไปในแนวที่ขนานกับแกนของทรงพาราโบลา โคมไฟแบบนี้มักใช้ในงานแสดงคอนเสิร์ต โรงละคร และทางวิ่งเครื่องบิน (เปิด VDO ประกอบ)

3. นักเรียนเข้ากลุ่มตามที่ครูได้แบ่งไว้ออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4 คน (อัตราส่วน เก่ง : ปานกลาง : อ่อน = 1 : 2 : 1) จากนั้นให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันศึกษาใบความรู้ เรื่อง พาราโบลา 4 โดยให้นักเรียนที่มีความสามารถเก่งช่วยสอนนักเรียนที่มีความสามารถปานกลางและอ่อน ซึ่งครูทำหน้าที่สังเกตและแนะนำ เมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย

ขั้นฝึกทักษะ

4. นักเรียนทำใบงาน เรื่อง พาราโบลา 4 โดยใช้เวลาลงมือปฏิบัติ 20 นาที

5. เมื่อครบ 20 นาทีแล้ว ให้นักเรียนสลับใบงานกับเพื่อนเพื่อตรวจคำตอบ พร้อมกับครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน

ขั้นสรุป

6. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับพาราโบลาในชีวิตประจำวัน ซึ่งนักเรียนจะเห็นว่าการศึกษาเรื่องพาราโบลาเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการหาระยะห่างภายในเส้นโค้ง การหาความกว้างของเส้นโค้ง โดยใช้ความรู้เรื่องการหาจุดยอด โฟกัส และความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลา

6. สื่อ/วัสดุอุปกรณ์/แหล่งเรียนรู้

1. โปรแกรม GeoGebra
2. ใบงาน เรื่อง พาราโบลา 1
3. ใบความรู้ เรื่อง พาราโบลา 2
5. ใบงาน เรื่อง พาราโบลา 2
6. ใบความรู้ เรื่อง พาราโบลา 3
7. ใบงาน เรื่อง พาราโบลา 3
8. ใบความรู้ เรื่อง พาราโบลา 4
9. ใบงาน เรื่อง พาราโบลา 4

7. การวัดและประเมินผล

ประเด็นการประเมิน	เครื่องมือ	วิธีการ	เกณฑ์
ด้านความรู้ (K) - นักเรียนสามารถหาสมการพาราโบลาได้ - นักเรียนสามารถหาจุดยอด โฟกัส ความยาวเลตัสเรกตัม และไตรแอกทริกซ์จากสมการพาราโบลาที่กำหนดให้ได้	ใบงาน	การทำใบงาน	นักเรียนได้คะแนนร้อยละ 60 ขึ้นไป
ด้านทักษะและกระบวนการ (P) - นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา - นักเรียนสามารถใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ได้ - นักเรียนสามารถให้เหตุผลเพื่อให้เกิดข้อเท็จจริง - นักเรียนสามารถเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์เข้ากับชีวิตประจำวัน	แบบสังเกต พฤติกรรมการทำงาน	สังเกตพฤติกรรมการทำงาน	นักเรียนได้คะแนนระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ (A) - นักเรียนมีวินัยในตนเอง - นักเรียนมีความใฝ่รู้ใฝ่เรียน - นักเรียนมีความมุ่งมั่นในการทำงาน	แบบสังเกต พฤติกรรมการทำงาน รายบุคคล	ประเมินการปฏิบัติงาน รายบุคคล	นักเรียนได้คะแนนระดับดีขึ้นไป

บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

รหัสวิชา ค31202

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

บันทึกผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผลการจัดการเรียนรู้

.....

.....

.....

.....

2. ปัญหาและอุปสรรคที่พบ

.....

.....

.....

.....

3. แนวทางแก้ไขปัญหาและข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางสาวพจนันท์ วัชรโรทัย)

ครูผู้สอน

ความคิดเห็นของผู้บริหาร

.....

.....

.....

ลงชื่อ

(นายสุชาติ หุทิพย์)

ผู้อำนวยการโรงเรียนทับสะแกวิทยา

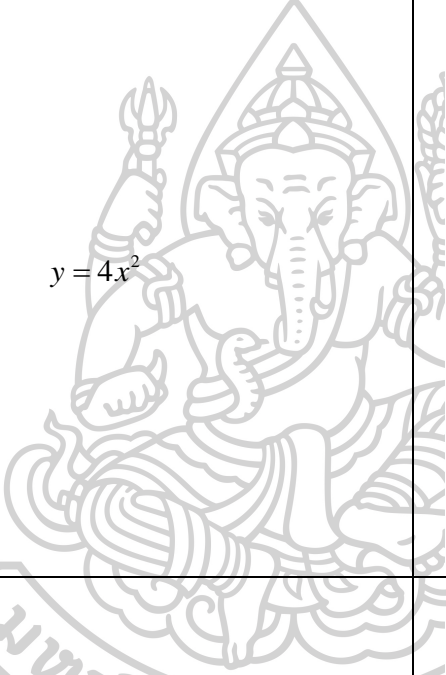
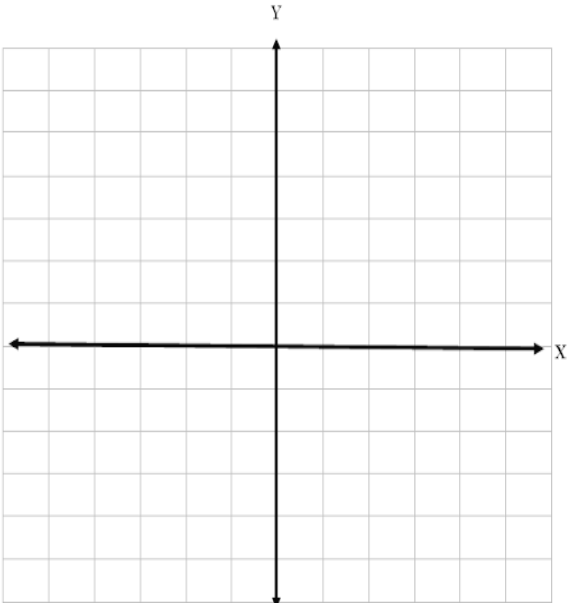

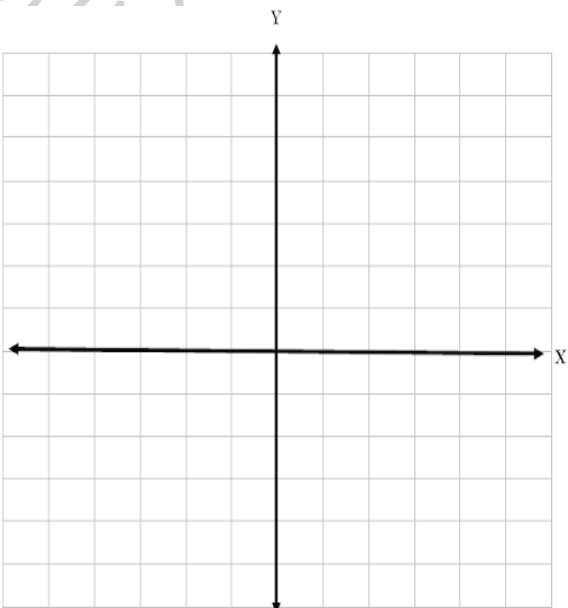
..... /..... /.....

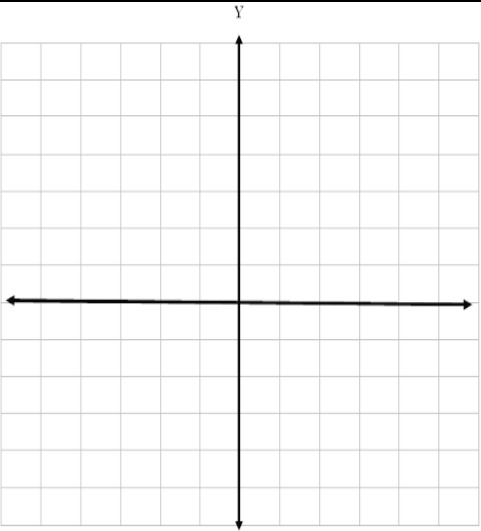
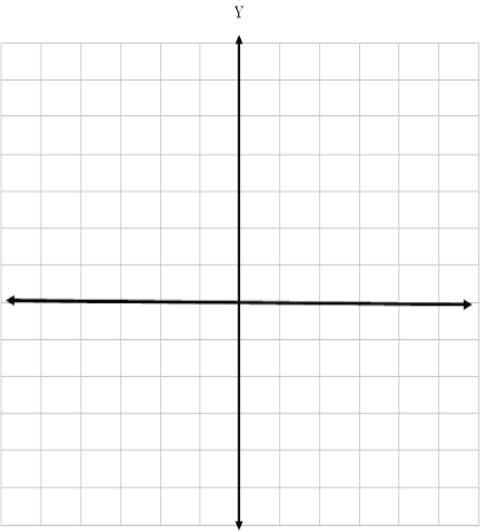
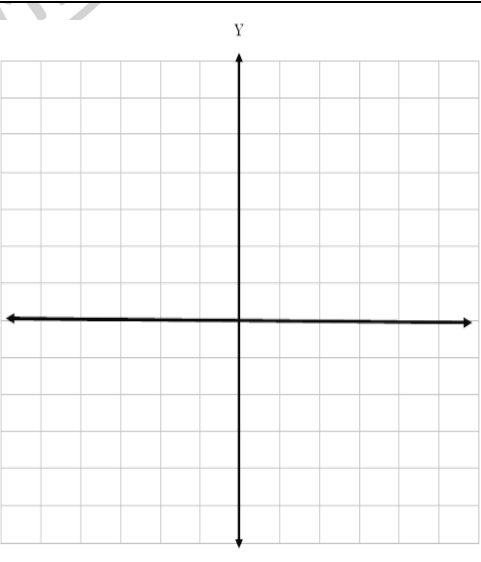
ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่

ใบงาน เรื่อง พาราโบลา 1



คำชี้แจง : ให้นักเรียนเขียนกราฟพาราโบลาที่นักเรียนวาดได้

สมการพาราโบลา	กราฟของพาราโบลา
 $y = 4x^2$	
 $y = 4x^2 + 1$	

สมการพาราโบลาที่ได้	กราฟของพาราโบลา
$y = -\frac{1}{3}x^2$	
$y = \frac{1}{3}x^2 - 3$	
$y = -2x^2 + 3$	

ใบความรู้ เรื่อง พาราโบลา 2

คำชี้แจง : ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้โจทย์ปัญหา โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL



พาราโบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งห่างจากจุดที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่งและเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **โฟกัส** ของพาราโบลา และเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่นี้ เรียกว่า **เส้นบังคับ** หรือ **เส้นไดเรกทริกซ์** ของพาราโบลา

รูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด $(0, 0)$

- พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง มีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $x^2 = 4py$

- พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน มีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $y^2 = 4px$

 ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอด $V(0, 0)$ และโฟกัส $F(0, 3)$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ พาราโบลามีจุดยอด $V(0, 0)$ และโฟกัส $F(0, 3)$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา สมการพาราโบลา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

เนื่องจากจุดยอด คือ และ โฟกัส คือ

จะได้ว่า $p = 3$ และไดเรกทริกซ์ คือ $y = -3$

และได้ว่าพาราโบลามีแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง

นั่นคือ สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $x^2 = 4py$

แทนค่า $p = 3$ จะได้ สมการพาราโบลา คือ $x^2 = 12y$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า สมการพาราโบลา คือ $x^2 = 12y$

 ตัวอย่างที่ 2 จงหาโฟกัส และไดเรกทริกซ์ของพาราโบลา $4x + y^2 = 0$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ พาราโบลามีสมการเป็น $4x + y^2 = 0$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา โฟกัส และ ไตเรกตริกซ์

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จากสมการพาราโบลา $4x + y^2 = 0$ เขียนในรูปมาตรฐานได้ดังนี้ $y^2 = -4x$

เมื่อเทียบกับสมการรูปแบบมาตรฐาน $y^2 = 4px$

จะได้ $4p = -4$ นั่นคือ $p = -1$ (แสดงว่าพาราโบลามีกราฟตะแคงซ้าย)

ดังนั้น โฟกัส คือ $(-1, 0)$ และ ไตเรกตริกซ์ คือ $x = 1$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า โฟกัส คือ $(-1, 0)$ และ ไตเรกตริกซ์ คือ $x = 1$

 ตัวอย่างที่ 3 จงหาโฟกัส ไตเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลา $y = -\frac{1}{2}x^2$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ พาราโบลามีสมการเป็น $y = -\frac{1}{2}x^2$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา โฟกัส ไตเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัม

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จากสมการพาราโบลา $y = -\frac{1}{2}x^2$ เขียนในรูปมาตรฐานได้ดังนี้ $x^2 = -2y$

เมื่อเทียบกับสมการรูปแบบมาตรฐาน $x^2 = 4py$

จะได้ $4p = -2$ นั่นคือ $p = -\frac{1}{2}$ (แสดงว่าพาราโบลามีกราฟคว่ำ)

ดังนั้น โฟกัส คือ $(0, -\frac{1}{2})$ และ ไตเรกตริกซ์ คือ $y = \frac{1}{2}$

และเลตัสเรกตัมยาว $|4p| = |-2| = 2$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

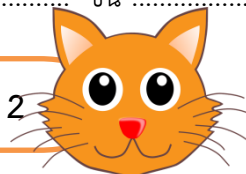
เราสรุปได้ว่า โฟกัส คือ $(0, -\frac{1}{2})$ และ ไตเรกตริกซ์ คือ $y = \frac{1}{2}$

และเลตัสเรกตัมยาว $|4p| = |-2| = 2$



ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่

ใบงาน เรื่อง พาราโบลา 2



คำชี้แจง : ให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียด โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

1. จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอด $V(0, 0)$ และโฟกัส $F(-4, 0)$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่ง โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่ง โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

2. จงหาโฟกัส และไดเรกทริกซ์ของพาราโบลา $y^2 = 7x$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่ง โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่ง โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

3. จงหาโฟกัส และไคเรกตริกซ์ของพาราโบลา $-2y + x^2 = 0$

วิธีทำ

ชั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้
 โจทย์กำหนดให้

ชั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ
 โจทย์ต้องการหา

ชั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

ชั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

4. จงหาโฟกัส ไคเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลา $x = \frac{1}{8}y^2$

วิธีทำ

ชั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้
 โจทย์กำหนดให้

ชั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ
 โจทย์ต้องการหา

ชั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

ชั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

5. จงหาสมการพาราโบลาที่มี $x = -3$ เป็นเส้นไคเรกตริกซ์ และโฟกัสอยู่ที่ $(3, 0)$

วิธีทำ

ชั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้
 โจทย์กำหนดให้

ชั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ
 โจทย์ต้องการหา

ชั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

ชั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้



ใบความรู้ เรื่อง พาราโบลา 3

คำชี้แจง : ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้โจทย์ปัญหา โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

รูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0)

- พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง มีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $x^2 = 4py$
- พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน มีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $y^2 = 4px$

รูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k)

- พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง มีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
- พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน มีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

 ตัวอย่างที่ 1 จงหาจุดยอด โฟกัส และไคเรกตริกซ์ของพาราโบลา $(y-2)^2 = 8(x+1)$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ พาราโบลามีสมการเป็น $(y-2)^2 = 8(x+1)$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา จุดยอด โฟกัส และไคเรกตริกซ์

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จากพาราโบลามีสมการเป็น $(y-2)^2 = 8(x+1)$ จะได้แกนสมมาตรอยู่ใน

แนวนอน เมื่อเทียบกับสมการรูปแบบมาตรฐาน $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

จะได้ $h = -1$, $k = 2$ และ $4p = 8$ และได้ว่า $p = 2$

ทำให้ได้ว่า จุดยอดของพาราโบลานี้อยู่ที่ $(-1, 2)$

โฟกัส คือ $(h + p, k) = (-1 + 2, 2) = (1, 2)$

ไคเรกตริกซ์ คือ $x = h - p = -1 - 2 = -3$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า จุดยอดของพาราโบลานี้อยู่ที่ $(-1, 2)$ โฟกัส คือ $(1, 2)$

ไคเรกตริกซ์ คือ $x = -3$



ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดยอด โฟกัส ความยาวเลตส์เรกตัม และไคเรกตริกซ์ของพาราโบลา

$$x^2 - 4x = 8y - 28$$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ พาราโบลามีสมการเป็น $x^2 - 4x = 8y - 28$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา จุดยอด โฟกัส ความยาวเลตส์เรกตัม และไคเรกตริกซ์

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จากพาราโบลามีสมการเป็น $x^2 - 4x = 8y - 28$ จัดให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ดังนี้

$$x^2 - 2(x)(2) + 2^2 = 8y - 28 + 2^2$$

$$(x - 2)^2 = 8y - 24$$

$$(x - 2)^2 = 8(y - 3)$$

จะเห็นว่า แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง

เมื่อเทียบกับสมการรูปแบบมาตรฐาน $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

จะได้ $h = 2$, $k = 3$ และ $4p = 8$ และได้ว่า $p = 2$

ทำให้ได้ว่า จุดยอดของพาราโบลานี้อยู่ที่ $(2, 3)$

โฟกัส คือ $(h, k + p) = (2, 3 + 2) = (2, 5)$

เลตส์เรกตัมยาว $|4p| = |8| = 8$ หน่วย

ไคเรกตริกซ์ คือ $y = k - p = 3 - 2 = 1$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า จุดยอดของพาราโบลานี้อยู่ที่ $(2, 3)$ โฟกัส คือ $(2, 5)$

เลตส์เรกตัมยาว 8 หน่วย ไคเรกตริกซ์ คือ $y = 1$



ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดโฟกัส $(-2, 5)$ และไคเรกตริกซ์ คือ $y = -1$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ พาราโบลามีจุดโฟกัส $(-2, 5)$ และไคเรกตริกซ์ คือ $y = -1$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา สมการพาราโบลา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จากพาราโบลามีจุดโฟกัส $(-2, 5)$ และไคเรกตริกซ์ คือ $y = -1$

จะได้ว่า พาราโบลามีแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง ซึ่งมีสมการ คือ

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

และได้ว่า จุดยอดของพาราโบลานี้อยู่กึ่งกลางระหว่างโฟกัสและเส้นไคเรกตริกซ์

นั่นคือ จุดยอดหาได้จากการหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $(-2, 5)$ และ $(-2, -1)$

ดังนั้น จุดยอด คือ $\left(\frac{-2+(-2)}{2}, \frac{5+(-1)}{2}\right) = (-2, 2)$

จาก ไตรโกณมิติ $y = k - p$ จะได้ $-1 = 2 - p$ แสดงว่า $p = 3$

แทนค่า $h = -2$, $k = 2$ และ $p = 3$ ในสมการ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

จะได้ $(x-(-2))^2 = 4(3)(y-2)$

$$(x+2)^2 = 12(y-2)$$

$$x^2 + 4x + 4 = 12y - 24$$

$$x^2 + 4x - 12y + 28 = 0$$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า สมการพาราโบลา คือ $x^2 + 4x - 12y + 28 = 0$



ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่



ใบงาน เรื่อง พาราโบลา 3

คำชี้แจง : ให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียด โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

1. จงหาจุดยอด โฟกัส และไดเรกทริกซ์ของพาราโบลา $(y+1)^2 = -4(x-3)$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

2. จงหาจุดยอด โฟกัส ความยาวเลตัสเรกตัม และไดเรกทริกซ์ของพาราโบลา $x^2 + 2x = 7y - 29$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

3. จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดโฟกัส (3, -4) และไตเรกตริกซ์ คือ $y = -1$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่เราทราบบอกให้

เราทราบบอกให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่เราต้องการทราบ

เราต้องการทราบ

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

4. จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (-2, 3) และโฟกัสอยู่ที่จุด (-2, -2)

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่เราทราบบอกให้

เราทราบบอกให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่เราต้องการทราบ

เราต้องการทราบ

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

5. จงหาสมการพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่ (1, 3) และผ่านจุด (4, 5) และแกนสมมาตรขนานกับแกน Y
วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

.....

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

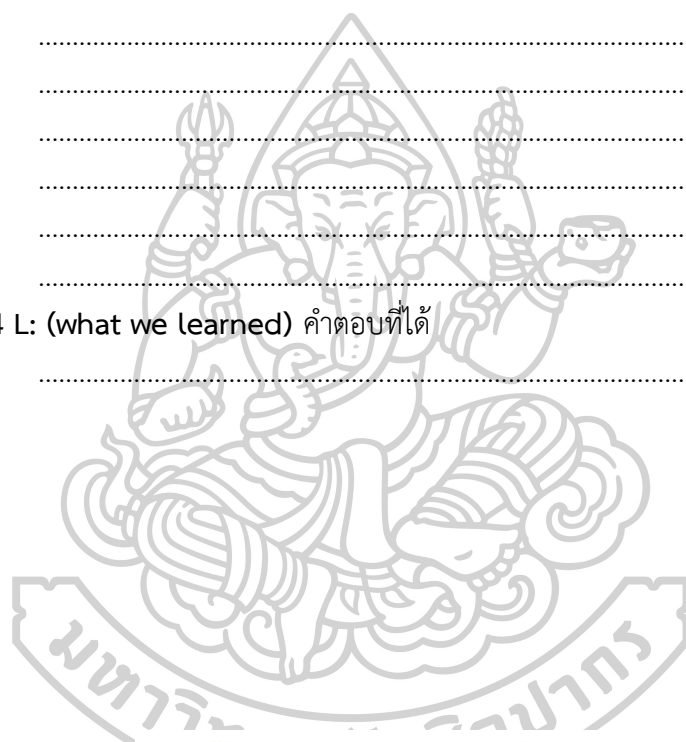
.....

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....





ใบความรู้ เรื่อง พาราโบลา 4

คำชี้แจง : ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้โจทย์ปัญหา โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

พาราโบลาไปใช้ได้จริงในชีวิตประจำวัน

ตัวอย่าง อุปกรณ์ส่องหาวัตถุมีคมสะท้อนทรงพาราโบลา กว้าง 12 นิ้ว และลึก 6 นิ้ว ถ้าต้องการให้ ใส้หลอดไฟอยู่ที่จุดโฟกัสของโคมเพื่อให้ผิวโคมไฟสะท้อนแสงเป็นลำขนานกับแกนของโคม ควรให้ ใส้หลอดไฟอยู่ห่างจากจุดยอดของโคมสะท้อนแสงเท่าใด

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ โคมสะท้อนทรงพาราโบลา กว้าง 12 นิ้ว และลึก 6 นิ้ว

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา ระยะห่างระหว่างใส้หลอดไฟและโคมสะท้อนแสง

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

ให้ ภาคตัดขวางของพาราโบลาของโคมในระนาบมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด $(0, 0)$

จาก โคมสะท้อนทรงพาราโบลา กว้าง 12 นิ้ว และลึก 6 นิ้ว

จะได้ว่า $(6, 6)$ อยู่บนพาราโบลา และแกนสมมาตรของพาราโบลาคือ แกน Y

และได้ว่า สมการพาราโบลา อยู่ในรูป $x^2 = 4py$

เนื่องจาก $(6, 6)$ อยู่บนพาราโบลา จะได้ $6^2 = 4p(6)$ นั่นคือ $p = 1.5$

ดังนั้น ระยะโฟกัส คือ $(0, 1.5)$

ทำให้ได้ว่า ระยะห่างระหว่างใส้หลอดไฟและโคมสะท้อนแสง คือ 1.5 นิ้ว

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า ควรให้ใส้หลอดไฟอยู่ห่างจากจุดยอดของโคมสะท้อนแสง เป็นระยะ

1.5 นิ้ว

ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่



ใบงาน เรื่อง พาราโบลา 4

คำชี้แจง : ให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียด โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

1. กำหนด $A(27, k)$ และ $B(k, 1)$ เป็นสองจุดบนพาราโบลา $x = ay^2$ โดยที่ a และ k เป็นจำนวนจริง จงหาโฟกัสของพาราโบลานี้

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

.....

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

2. เมื่อโยนก้อนหินขึ้นไปในอากาศในเวลา t ใดๆ ระยะเวลาสูง h (เมตร) ของก้อนหินจากพื้นเป็นไปตามสมการ $h = 240t - 5t^2$ จงหาว่าก้อนหินถูกโยนขึ้นไปได้สูงเป็นระยะทางเท่าใด

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

.....

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

3. เสาไฟฟ้าสองต้น ซึ่งสูง 50 ฟุตเท่ากัน อยู่ห่างกัน 200 ฟุต สายไฟที่อยู่ระหว่างเสาสองต้นนี้มีลักษณะเป็นพาราโบลา และ ณ จุดกึ่งกลางระหว่างเสาสองต้นนี้ สายไฟฟ้าอยู่สูงจากพื้นดิน 40 ฟุต จงหาว่า ณ จุดที่อยู่ห่างจากเสา 80 ฟุต สายไฟนี้สูงจากพื้นดินกี่ฟุต

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

รหัสวิชา ค 31202 รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2563 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์ เรื่อง ภาคตัดกรวย
ชื่อผู้สอน นางสาวพจนันท์ วัชรไธย เวลา 4 คาบ

1. ผลการเรียนรู้

1. เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ในการแก้ปัญหา

2. สาระการเรียนรู้

เรขาคณิตวิเคราะห์

- ไฮเพอร์โบลา

3. สาระสำคัญ

ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใดๆ ไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดนี้ว่า **โฟกัส** ของไฮเพอร์โบลา

รูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0)

- ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน

$$\text{คือ } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน

$$\text{คือ } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

รูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k)

- ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน

$$\text{คือ } \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

- ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน

$$\text{คือ } \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K)

- นักเรียนสามารถหาสมการไฮเพอร์โบลา และเขียนไฮเพอร์โบลาได้
- นักเรียนสามารถหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค และเส้นกำกับจากสมการไฮเพอร์โบลาได้

ด้านทักษะกระบวนการ (P)

- นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา
- นักเรียนสามารถใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ได้
- นักเรียนสามารถให้เหตุผลเพื่อให้เกิดข้อเท็จจริง

ด้านคุณลักษณะ (A)

- นักเรียนมีวินัยในตนเอง
- นักเรียนมีความใฝ่รู้ใฝ่เรียน
- นักเรียนมีความมุ่งมั่นในการทำงาน

5. กิจกรรมการเรียนการสอน

จัดกิจกรรมการเรียนการสอน 4 คาบ ใช้เทคนิคการสอนแบบ KWDL ซึ่งมีขั้นตอน 4 ขั้นตอน ดังนี้

คาบที่ 1

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนความรู้ เรื่อง รูปที่ได้จากการตัดกันของระนาบและกรวย ซึ่งได้แก่ วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา โดยใช้ใบกิจกรรมจากคาบที่ 1

2. ครูเกริ่นนำ เรื่อง ไฮเพอร์โบลา โดยพูดคุยกับนักเรียนเกี่ยวกับลักษณะของไฮเพอร์โบลา จะมีรูปร่างคล้ายกับพาราโบลาสองรูปที่หันจุดยอดเข้าหากัน ซึ่งดูผิวเผินคงคิดว่าสมการของไฮเพอร์โบลาน่าจะคล้ายกับพาราโบลาแต่ในความเป็นจริงแล้วการสร้างไฮเพอร์โบลาค้นคว้ามากกว่า

3. ครูทบทวนเกี่ยวกับ นิยามของวงรี และสมการของวงรี

วงรี คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนั้นไปยังจุดตรึงอยู่กับที่สองจุดมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดนี้ว่า **โฟกัส (focus)** ของวงรี

รูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด $(0, 0)$

- วงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน X จะมีสมการวงรีอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$

- วงรีที่มีโฟกัสอยู่บนแกน Y จะมีสมการวงรีอยู่ในรูป $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ เมื่อ $a > b$

รูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k)

- วงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอนจะมีสมการวงรีอยู่ในรูป $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

- วงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง จะมีสมการวงรีอยู่ในรูป $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

ชั้นสอนเนื้อหาใหม่

4. ครูชี้แจงจุดประสงค์การเรียนรู้ในคาบนี้ คือ นักเรียนสามารถเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา และหาสมการไฮเพอร์โบลา โดยใช้โปรแกรม GeoGebra ได้

5. นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra แล้วใช้โปรแกรม GeoGebra วาดกราฟของไฮเพอร์โบลาที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

- 1) มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(-2, 0)$ และ $(2, 0)$ และมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(4, 0)$ และ $(-4, 0)$
- 2) มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(-2, 0)$ และ $(2, 0)$ และมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(6, 0)$ และ $(-6, 0)$
- 3) มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 2)$ และ $(0, -2)$ และมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, 4)$ และ $(0, -4)$
- 4) มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 2)$ และ $(0, -2)$ และมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, 6)$ และ $(0, -6)$

แล้วนำกราฟของไฮเพอร์โบลาของตนเองมาเปรียบเทียบกับเพื่อน

6. นักเรียนร่วมกันสังเกต จุดยอด จุดโฟกัส และเส้นกำกับจากที่ครูกำหนดให้กับกราฟของไฮเพอร์โบลาที่ได้

7. นักเรียนวาดกราฟไฮเพอร์โบลาโดยใช้โปรแกรม GeoGebra จากสมการ $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$, $9x^2 - 16y^2 = 144$ และ $x^2 - 4y^2 - 8 = 0$ ครูบอกให้นักเรียนสังเกต จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท และเส้นกำกับจากกราฟพาราโบลาที่ปรากฏในสมการ

8. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับสมการไฮเพอร์โบลา และกราฟของไฮเพอร์โบลา จนได้ข้อสรุปว่า ในการหารูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลา จะแบ่งเป็น 2 แบบ คือ

แบบที่ 1 แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

แบบที่ 2 แกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

ชั้นฝึกทักษะ

9. นักเรียนทำใบงานเรื่อง ไฮเพอร์โบลา 1 โดยใช้เวลา 15 นาที และเมื่อครบ 15 นาที ให้นักเรียนสลับใบงานกับเพื่อน เพื่อแลกเปลี่ยนตรวจ พร้อมกับครูเฉลยใบงาน

ขั้นสรุป

10. ครูสรุปว่า รูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลา จะแบ่งเป็น 2 แบบ คือ

แบบที่ 1 แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

แบบที่ 2 แกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

คาบที่ 2

ชั้นนำ

- ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียน เรื่อง สมการไฮเพอร์โบลา ซึ่งแบ่งเป็น 2 แบบ คือ
แบบที่ 1 แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน มีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- แบบที่ 2 แกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง มีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

ขั้นสอนเนื้อหาใหม่

- นักเรียนเข้ากลุ่มตามที่ครูได้แบ่งไว้ออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4 คน (อัตราส่วน เก่ง : ปานกลาง : อ่อน = 1 : 2 : 1) จากนั้นให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันศึกษาใบความรู้ เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 2 โดยให้นักเรียนที่มีความสามารถเก่งช่วยสอนนักเรียนที่มีความสามารถปานกลางและอ่อน ซึ่งครูทำหน้าที่สังเกตและแนะนำ เมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย

ขั้นฝึกทักษะ

- นักเรียนทำใบงานเรื่อง ไฮเพอร์โบลา 2 โดยใช้เวลาลงมือปฏิบัติ 15 นาที
- เมื่อครบ 15 นาทีแล้ว ให้นักเรียนสลับใบงานกับเพื่อนเพื่อตรวจคำตอบ พร้อมกับครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน

ขั้นสรุป

- ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับการหาสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา โดยการทำตามขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาด้วยเทคนิค KWDL โดยให้นักเรียนหาข้อสังเกตในการจำสมการของไฮเพอร์โบลา เช่น ไฮเพอร์โบลาที่มีสมการ คือ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ จะเป็นแนวนอน ส่วนไฮเพอร์โบลาที่มีสมการ คือ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ จะเป็นแนวตั้ง

คาบที่ 3

ชั้นนำ

- ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนในเรื่องต่างๆ ดังนี้
- สมการไฮเพอร์โบลา ซึ่งแบ่งเป็น 2 แบบ คือ

- แบบที่ 1 แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน มีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- แบบที่ 2 แกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง มีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

- การแยกตัวประกอบโดยใช้กำลังสมบูรณ์ การดึงตัวร่วม โดยยกตัวอย่างบนกระดาน คือ $3x^2 + 6x + 3$, $20x^2 - 20x + 5$, $2x^2 + 12x + 18$ และ $4x^2 - 40x + 100$ แล้วสุ่มนักเรียนออกมาทำบนกระดาน

ชั้นสอนเนื้อหาใหม่

2. นักเรียนเปิดโปรแกรม GeoGebra แล้วใช้โปรแกรม GeoGebra วาดกราฟของไฮเพอร์โบลาที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

- 1) มีจุดยอดอยู่ที่จุด (3, 1) และ (1, 1) และมีจุดโฟกัสอยู่ที่ (-1, 1) และ (5, 1)
- 2) มีจุดยอดอยู่ที่จุด (3, -1) และ (1, -1) และมีจุดโฟกัสอยู่ที่ (-3, -1) และ (7, -1)
- 3) มีจุดยอดอยู่ที่จุด (2, 0) และ (2, 4) และมีจุดโฟกัสอยู่ที่ (2, -1) และ (2, 5)
- 4) มีจุดยอดอยู่ที่จุด (-2, -2) และ (-2, -4) และมีจุดโฟกัสอยู่ที่ (-2, 1) และ (-2, -7)

แล้วนำกราฟของไฮเพอร์โบลาของตนเองมาเปรียบเทียบกับเพื่อน

3. นักเรียนร่วมกันสังเกต จุดยอด จุดโฟกัส แกนเอก แกนโทและเส้นกำกับจากที่ครูกำหนดให้กับกราฟของไฮเพอร์โบลาที่ได้

4. นักเรียนวาดกราฟไฮเพอร์โบลาโดยใช้โปรแกรม GeoGebra จากสมการ $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$, $\frac{(x+2)^2}{8} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$, $\frac{(x+3)^2}{25} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ และ $\frac{(x+1)^2}{25} - \frac{(y-2)^2}{36} = 1$ และนักเรียนร่วมกันสังเกต จุดยอด จุดโฟกัส แกนเอก แกนโทและเส้นกำกับจากกราฟพาราโบลาที่ปรากฏในสมการ

5. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายจนได้ข้อสรุปว่า ถ้าเลื่อนไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ให้จุดศูนย์กลางของวงรีไปอยู่ที่ (h, k) แล้วสมการวงรีจะอยู่ในรูป $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน) และถ้าเลื่อนวงรีที่มีสมการเป็น $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ให้จุดศูนย์กลางของวงรีไปอยู่ที่ (h, k) แล้วสมการวงรีจะอยู่ในรูป $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ (แกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง)

6. นักเรียนเข้ากลุ่มตามที่ครูได้แบ่งไว้ออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4 คน (อัตราส่วน เก่ง : ปานกลาง : อ่อน = 1 : 2 : 1) จากนั้นให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันศึกษาใบความรู้ เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 3 โดยให้นักเรียนที่มีความสามารถเก่งช่วยสอนนักเรียนที่มีความสามารถปานกลางและอ่อน ซึ่งครูทำหน้าที่สังเกตและแนะนำ เมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย

ชั้นฝึกทักษะ

7. นักเรียนทำใบงาน เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 3 โดยใช้เวลาลงมือปฏิบัติ 15 นาที

8. เมื่อครบ 15 นาทีแล้ว ให้นักเรียนสลับใบงานกับเพื่อนเพื่อตรวจคำตอบ พร้อมกับครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน

ขั้นสรุป

9. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับการหาสมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา เมื่อมีการเลื่อนกราฟ หรือมีการเปลี่ยนตำแหน่งของจุดศูนย์กลางจาก $(0, 0)$ เป็น (h, k) ครูเน้นย้ำนักเรียนเรื่อง การดึงตัวร่วม ซึ่งมีเครื่องหมายลบอยู่ ต้องทำการเปลี่ยนเครื่องหมายในวงเล็บทั้งหมด

คาบที่ 4

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนความรู้เรื่องเดิมของนักเรียน ดังนี้

- สมการไฮเพอร์โบลา

แบบที่ 1 แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน มีสมการอยู่ในรูป

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

แบบที่ 2 แกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง มีสมการอยู่ในรูป

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

- การหาจุดยอด โฟกัส ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค และเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา

- การหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด เมื่อกำหนดจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ ถ้าจุด $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 แล้ว $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ และ $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

2. นักเรียนทบทวน เรื่อง การแยกตัวประกอบโดยใช้การดึงตัวร่วม และการแยกตัวประกอบโดยใช้กำลังสองสมบูรณ์ จากโจทย์ที่ครูกำหนดให้

ขั้นสอนเนื้อหาใหม่

3. นักเรียนเข้ากลุ่มตามที่ครูได้แบ่งไว้ออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4 คน (อัตราส่วน เก่ง : ปานกลาง : อ่อน = 1 : 2 : 1) จากนั้นให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันศึกษาใบความรู้ เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 4 โดยให้นักเรียนที่มีความสามารถเก่งช่วยสอนนักเรียนที่มีความสามารถปานกลางและอ่อน ซึ่งครูทำหน้าที่สังเกตและแนะนำ เมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย

ขั้นฝึกทักษะ

4. นักเรียนทำใบงาน เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 4 โดยใช้เวลาลงมือปฏิบัติ 15 นาที

5. เมื่อครบ 15 นาทีแล้ว ให้นักเรียนสลับใบงานกับเพื่อนเพื่อตรวจคำตอบ พร้อมกับครูสุ่มนักเรียนมานำเสนอคำตอบหน้าชั้นเรียน

ขั้นสรุป

6. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับการหาสมการไฮเพอร์โบลา การหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค โฟกัส และเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา ซึ่งครูเน้นย้ำในเรื่องการใช้สมการไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน จะมีสมการรูปแบบมาตรฐาน

เป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ และสมการไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง จะมีสมการ
 รูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ และให้ทำตามขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาด้วย
 เทคนิค KWDL อย่างละเอียด นักเรียนต้องอ่านโจทย์ให้ชัด และเขียนให้ครบทุกขั้นตอน

6. สื่อ/วัสดุอุปกรณ์/แหล่งเรียนรู้

1. โปรแกรม GeoGebra
2. ใบงาน เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 1
3. ใบความรู้ เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 2
4. ใบงาน เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 2
5. ใบความรู้ เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 3
6. ใบงาน เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 3
7. ใบความรู้ เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 4
8. ใบงาน เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 4

7. การวัดและประเมินผล

ประเด็นการประเมิน	เครื่องมือ	วิธีการ	เกณฑ์
ด้านความรู้ (K) - นักเรียนสามารถหาสมการไฮเพอร์โบลา และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ - นักเรียนสามารถหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ความยาวแกนตามขวาง ความยาว แกนสังยุค และเส้นกำกับจากสมการไฮเพอร์โบลาได้	ใบงาน	การทำใบงาน	นักเรียนได้คะแนน ร้อยละ 60 ขึ้นไป
ด้านทักษะและกระบวนการ (P) - นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา - นักเรียนสามารถใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ได้ - นักเรียนสามารถให้เหตุผลเพื่อให้เกิดข้อเท็จจริง	แบบสังเกต พฤติกรรมการทำงาน	สังเกต พฤติกรรมการทำงาน	นักเรียนได้คะแนนระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ (A) - นักเรียนมีวินัยในตนเอง - นักเรียนมีความใฝ่รู้ใฝ่เรียน - นักเรียนมีความมุ่งมั่นในการทำงาน	แบบสังเกต พฤติกรรมปฏิบัติ งานรายบุคคล	ประเมินการ ปฏิบัติงาน รายบุคคล	นักเรียนได้คะแนนระดับดีขึ้นไป

บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

รหัสวิชา ค31202

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

บันทึกผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. ผลการจัดการเรียนรู้

.....
.....
.....
.....

2. ปัญหาและอุปสรรคที่พบ

.....
.....
.....
.....

3. แนวทางแก้ไขปัญหาและข้อเสนอแนะ

.....
.....
.....
.....



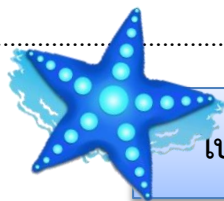
ลงชื่อ.....
(นางสาวพจนันท์ วัชรโรทัย)
ครูผู้สอน

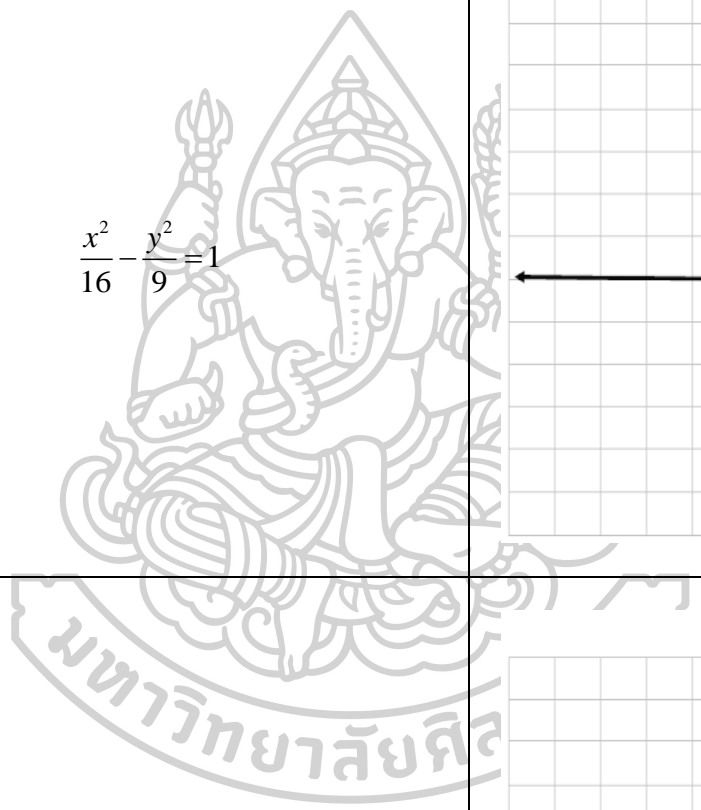
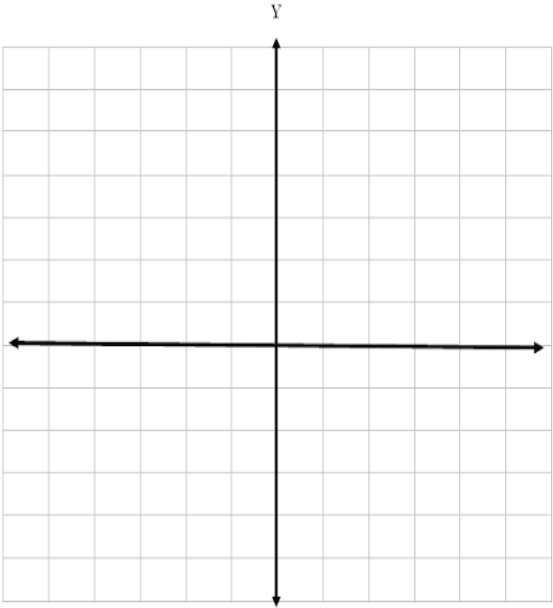
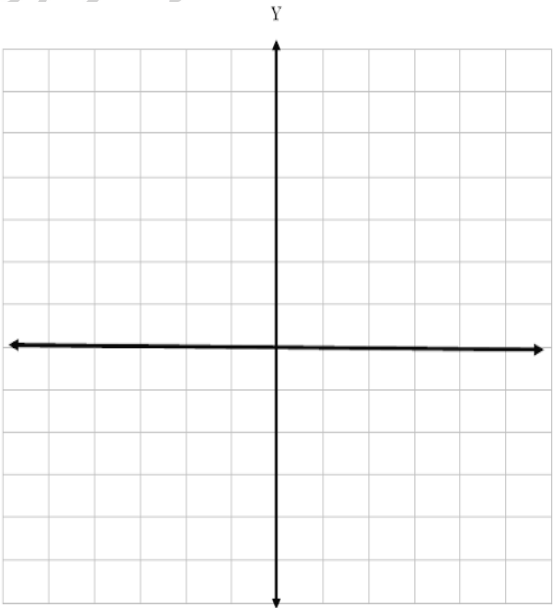
ความคิดเห็นของผู้บริหาร

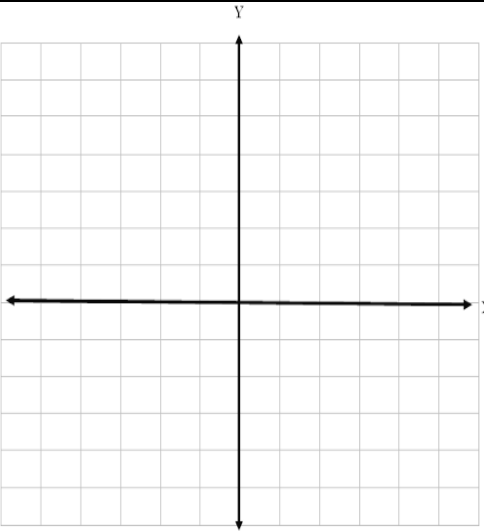
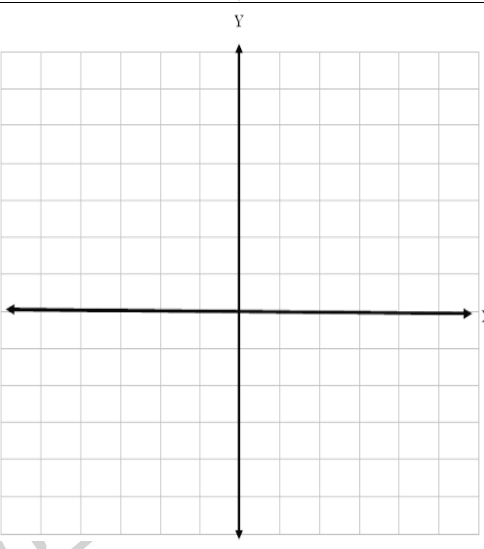
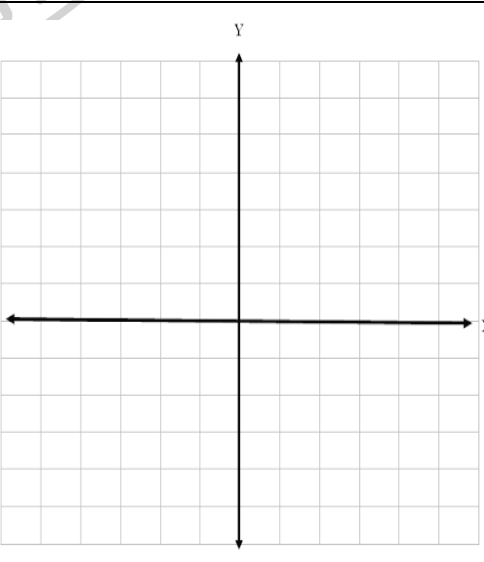
.....
.....
.....

ลงชื่อ
(นายสุชาติ หุทิพย์)
ผู้อำนวยการโรงเรียนทับสะแกวิทยา
..... /..... /.....

ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่


เบงาน เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 1
คำชี้แจง : ให้นักเรียนเขียนกราฟไฮเพอร์โบลาที่นักเรียนวาดได้

สมการไฮเพอร์โบลา	กราฟของไฮเพอร์โบลา
$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 	
$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{8} = 1$	

สมการไฮเพอร์โบลาที่ได้	กราฟของไฮเพอร์โบลา
$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{7} = 1$	
$\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{5} = 1$	
$\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{16} = 1$	



ใบความรู้ เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 2

คำชี้แจง : ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้โจทย์ปัญหา โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใดๆ ไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดนี้ว่า **โฟกัส** ของไฮเพอร์โบลา


รูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0)

- ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

 **ตัวอย่างที่ 1** จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุด (-2, 0) และ (2, 0) เป็นจุดยอด และโฟกัสอยู่ที่จุด (-3, 0) และ (3, 0)

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ ไฮเพอร์โบลามีจุด (-2, 0) และ (2, 0) เป็นจุดยอด และโฟกัสอยู่ที่จุด (-3, 0) และ (3, 0)

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา สมการไฮเพอร์โบลา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จากโจทย์ จะได้ $a = 2$ และ $c = 3$

จากจุดยอดอยู่ในแนวนอน จะได้ว่า ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวนอน และ

สมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $3^2 = 2^2 + b^2$

$$b^2 = 9 - 4$$


$$b = \sqrt{5}$$

แทนค่า $a = 2$, $b = \sqrt{5}$ ในสมการ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\text{จะได้ } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

$$\text{เราสรุปได้ว่า สมการไฮเพอร์โบลา คือ } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

 ตัวอย่างที่ 2 ไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีสมการเป็น $16x^2 - 9y^2 = 144$ จงหาจุดยอด โฟกัส และเส้นกำกับ

วิธีทำ ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

$$\text{โจทย์กำหนดให้ ไฮเพอร์โบลามีสมการเป็น } 16x^2 - 9y^2 = 144$$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา จุดยอด โฟกัส และเส้นกำกับ

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

$$\text{จากสมการไฮเพอร์โบลา } 16x^2 - 9y^2 = 144$$

$$\text{เขียนในรูปมาตรฐานได้ดังนี้ } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\text{เมื่อเทียบกับสมการรูปแบบมาตรฐาน } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{จะได้ } a^2 = 9 \text{ นั่นคือ } a = 3 \text{ และ } b^2 = 16 \text{ นั่นคือ } b = 4$$

และได้ว่า ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวนอน จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน X

$$\text{จาก } c^2 = a^2 + b^2 \text{ จะได้ } c^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \text{ นั่นคือ } c = 5$$

ดังนั้น จุดยอด คือ $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$


โฟกัส คือ $(-5, 0)$ และ $(5, 0)$

$$\text{เส้นกำกับ คือ เส้นตรง } y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{4}{3}x$$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า จุดยอด คือ $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$ โฟกัส คือ $(-5, 0)$ และ $(5, 0)$

$$\text{เส้นกำกับ คือ เส้นตรง } y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{4}{3}x$$

 ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุด $(0, -2)$ และ $(0, 2)$ เป็นจุดยอด และเส้นกำกับ คือเส้นตรง $y = \pm x$

วิธีทำ ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

กำหนดให้ ไฮเพอร์โบลามีจุด $(0, -2)$ และ $(0, 2)$ เป็นจุดยอด และเส้นกำกับ คือ

$$\text{เส้นตรง } y = \pm x$$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา สมการไฮเพอร์โบลา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จากโจทย์ จะได้ $a = 2$ และจุดยอดบนแกน Y

ทำให้ได้ ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง

และมีเส้นกำกับอยู่ในรูป $y = \pm \frac{a}{b}x$

จากโจทย์ เส้นกำกับ $y = \pm x$ จะได้ $\frac{a}{b} = 1$

แทน $a = 2$ จะได้ $b = 2$

จากสมการของไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ จะได้ $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า สมการไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$



ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

5. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ มีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(0, -6)$ และมีโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(0, 8)$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

.....

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....





ใบความรู้ เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 3

คำชี้แจง : ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้โจทย์ปัญหา โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

รูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0)

- ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

- ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

รูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k)

- ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

- ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



 **ตัวอย่างที่ 1** จงหาจุดยอด โฟกัส ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค และสมการเส้นกำกับของ

ไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

$$\text{โจทย์กำหนดให้ ไฮเพอร์โบลามีสมการเป็น } \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา จุดยอด โฟกัส ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค และสมการเส้นกำกับ

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

$$\text{จากสมการไฮเพอร์โบลา } \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้ $h = 1, k = -2, a = 4$ และ $b = 3$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ นั่นคือ $c = 5$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลา มี จุดยอด คือ $(h - a, k) = (1 - 4, -2) = (-3, -2)$

$(h + a, k) = (1 + 4, -2) = (5, -2)$

โฟกัส คือ $(h - c, k) = (1 - 5, -2) = (-4, -2)$

$(h + c, k) = (1 + 5, -2) = (6, -2)$

แกนตามขวางยาว $2a = 2(4) = 8$ หน่วย

แกนสังยุคยาว $2b = 2(3) = 6$ หน่วย

เส้นกำกับ คือ $y - k = \frac{b}{a}(x - h)$

$$y - (-2) = \frac{3}{4}(x - 1)$$


$$3x - 4y - 11 = 0$$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า จุดยอด คือ $(-3, -2)$ และ $(5, -2)$

โฟกัส คือ $(-4, -2)$ และ $(6, -2)$ แกนตามขวางยาว 8 หน่วย

แกนสังยุคยาว 6 หน่วย เส้นกำกับ คือ $3x - 4y - 11 = 0$

 ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดยอด โฟกัส ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค และสมการเส้นกำกับของ

ไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $9y^2 - 16x^2 + 54y + 64x - 127 = 0$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ ไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $9y^2 - 16x^2 + 54y + 64x - 127 = 0$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา จุดยอด โฟกัส ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค และสมการเส้นกำกับ

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จากสมการไฮเพอร์โบลา $9y^2 - 16x^2 + 54y + 64x - 127 = 0$

เขียนในรูปมาตรฐานได้ดังนี้ $(9y^2 + 54y) - (16x^2 - 64x) = 127$

$$9(y^2 + 6y) - 16(x^2 - 4x) = 127$$

$$9(y^2 + 2(y)(3) + 3^2) - 16(x^2 - 2(x)(2) + 2^2) = 127 + 9(3^2) - 16(2^2)$$

$$9(y+3)^2 - 16(x-2)^2 = 144$$

$$\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$$

เมื่อเทียบกับสมการรูปแบบมาตรฐาน $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

จะได้ $a^2 = 16$ นั่นคือ $a = 4$ และ $b^2 = 9$ นั่นคือ $b = 3$

และได้ว่า ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ นั่นคือ $c = 5$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามี จุดยอด คือ $(h, k - a) = (2, -3 - 4) = (2, -7)$

$$(h, k + a) = (2, -3 + 4) = (2, 1)$$

โฟกัส คือ $(h, k - c) = (2, -3 - 5) = (2, -8)$

$$(h, k + c) = (2, -3 + 5) = (2, 2)$$

แกนตามขวางยาว $2a = 2(4) = 8$ หน่วย

แกนสังยุคยาว $2b = 2(3) = 6$ หน่วย

เส้นกำกับ คือ $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

$$y - (-3) = \pm \frac{4}{3}(x - 2)$$

$$y + 3 = \pm \frac{4}{3}(x - 2)$$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า จุดยอด คือ $(2, -7)$ และ $(2, 1)$

โฟกัส คือ $(2, -8)$ และ $(2, 2)$ แกนตามขวางยาว 8 หน่วย

แกนสังยุคยาว 6 หน่วย เส้นกำกับ คือ $y + 3 = \pm \frac{4}{3}(x - 2)$



ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่

ใบงาน เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 3



คำชี้แจง : ให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียด

1. จงหาจุดยอด โฟกัส ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค และสมการเส้นกำกับของ

ไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{17} = 1$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่เราโจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่เราโจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

2. จงหาจุดยอด โฟกัส ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค และสมการเส้นกำกับของ

ไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $\frac{(x-7)^2}{13} - \frac{(y+13)^2}{7} = 1$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่เราโจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

.....

ชั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ชั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ชั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

3. จงหาจุดยอด โฟกัส ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนส่งยุค และสมการเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $4x^2 - y^2 + 8x - 4y + 8 = 0$

วิธีทำ

ชั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ชั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ชั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ชั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

4. จงหาจุดยอด โฟกัส ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค และเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา ในแต่ละข้อต่อไปนี้

4.1 $6x^2 - 5y^2 + 24x + 10y - 41 = 0$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

4.2 $11y^2 - 7x^2 - 66y - 14x - 27 = 0$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....



ใบความรู้ เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 4

คำชี้แจง : ให้นักเรียนศึกษาวิธีการแก้โจทย์ปัญหา โดยใช้ขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตามเทคนิค KWDL

รูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k)

- ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

- ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



 **ตัวอย่างที่ 1** จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(1, -3)$ และ $(1, 5)$ และกราฟผ่านจุด $(3, 6)$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ ไฮเพอร์โบลามีจุดยอดอยู่ที่ $(1, -3)$ และ $(1, 5)$
และกราฟผ่านจุด $(3, 6)$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา สมการของไฮเพอร์โบลา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จากไฮเพอร์โบลามีจุดยอดอยู่ที่ $(1, -3)$ และ $(1, 5)$

แสดงว่าจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา คือ จุดกึ่งกลางระหว่างจุด $(1, -3)$ และ $(1, 5)$

จะได้ว่า จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่ $\left(\frac{1+1}{2}, \frac{-3+5}{2}\right) = (1, 1)$

และได้ว่า $a = 4$ ซึ่งเป็นไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

แทนค่า $h = 1, k = 1$ และ $a = 4$ ลงใน $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

จะได้ สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(y-1)^2}{4^2} - \frac{(x-1)^2}{b^2} = 1$

และจากไฮเพอร์โบลา ผ่านจุด $(3, 6)$ แทนค่า $x = 3$ และ $y = 6$ จะได้

$$\frac{(6-1)^2}{4^2} - \frac{(3-1)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{25}{16} - \frac{4}{b^2} = 1$$

$$b^2 = \frac{64}{9}$$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{\frac{64}{9}} = 1$ หรือ

$$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{9(x-1)^2}{64} = 1$$

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{9(x-1)^2}{64} = 1$

 ตัวอย่างที่ 7 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส และเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $9x^2 - 16y^2 - 72x - 32y = 16$

วิธีทำ ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่เราโจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้ ไฮเพอร์โบลามีสมการเป็น $9x^2 - 16y^2 - 72x - 32y = 16$

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่เราโจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา จุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส และเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

จาก $9x^2 - 16y^2 - 72x - 32y = 16$

จะได้ $(9x^2 - 72x) - (16y^2 + 32y) = 16$

$$9(x^2 - 8x) - 16(y^2 + 2y) = 16$$

$$9(x^2 - 2(x)(4) + 4^2) - 16(y^2 + 2(y)(1) + 1^2) = 16 + 9(4^2) - 16(1^2)$$

$$9(x-4)^2 - 16(y+1)^2 = 144$$

$$\frac{(x-4)^2}{4^2} - \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$$

จากสมการ $\frac{(x-4)^2}{4^2} - \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$ จะได้ว่าสมการไฮเพอร์โบลาที่ได้มี

แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $h = 4, k = -1, a = 4$ และ $b = 3$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 4^2 + 3^2$ นั่นคือ $c = 5$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา คือ $(4, -1)$

จุดยอด คือ $(h - a, k) = (4 - 4, -1) = (0, -1)$

$(h + a, k) = (4 + 4, -1) = (8, -1)$

โฟกัส คือ $(h - c, k) = (4 - 5, -1) = (-1, -1)$

$(h + c, k) = (4 + 5, -1) = (9, -1)$

เส้นกำกับ คือ $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$

$y + 1 = \pm \frac{4}{3}(x - 4)$

ชั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

เราสรุปได้ว่า จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา คือ $(4, -1)$

จุดยอด คือ $(0, -1)$ และ $(8, -1)$ โฟกัส คือ $(-1, -1)$ และ $(9, -1)$

เส้นกำกับ คือ $y + 1 = \pm \frac{4}{3}(x - 4)$



ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่

ใบงาน เรื่อง ไฮเพอร์โบลา 4



คำชี้แจง : ให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียด

1. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(4, 5)$ และ $(-2, 5)$ และไฮเพอร์โบลาผ่านจุด $(-8, 6)$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

2. ถ้าไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, 3)$ มีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(6, 3)$ และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(7, 3)$ แล้วจงหาสมการของไฮเพอร์โบลานี้

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

3. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(3, -1)$ มีแกนสังยุคยาว 8 หน่วย และมีลาตัสเรกตัมยาว 12 หน่วย พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

.....

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

4. ให้นักเรียนพิจารณาว่าสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้ มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยชนิดใด พร้อมทั้งเขียนกราฟในระนาบเดียวกัน

4.1 $7x^2 + 3y^2 - 28x + 7 = 0$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

.....

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

$$4.2 \quad 9y^2 - 16x^2 + 96x + 18y = 279$$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

.....

$$4.3 \quad x^2 + 6x - 20y = 11$$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

.....

$$4.4 \quad 3x^2 + 3y^2 + 6x - 24y - 51 = 0$$

วิธีทำ

ขั้น 1 K: (What we know) สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

โจทย์กำหนดให้

ขั้น 2 W: (What we want to know) สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

โจทย์ต้องการหา

ขั้น 3 D: (What we do to find out) ดำเนินการแก้โจทย์ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ขั้น 4 L: (what we learned) คำตอบที่ได้

.....

.....

.....



8. สมการไฮเพอร์โบล่าที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-7, 0)$ โฟกัสหนึ่งอยู่ที่จุดกำเนิด แกนตามขวางยาว 6 หน่วย คือข้อใด

ก. $9x^2 - 40y^2 - 560y + 1600 = 0$

ข. $40x^2 - 9y^2 + 560x + 1600 = 0$

ค. $9x^2 - 40y^2 - 560y + 2320 = 0$

ง. $40x^2 - 9y^2 + 560x + 2320 = 0$

9. สมการพาราโบลาที่มีสมการเส้นไดเรกทริกซ์คือ $y = 3$ และจุดโฟกัสอยู่ที่จุด $(0, -3)$

ก. $y^2 = -12x$

ข. $y^2 = 12x$

ค. $x^2 = -12y$

ง. $x^2 = 12y$

10. สมการวงรีที่มีแกนเอกยาว 4 หน่วย แกนโทยาว 2 หน่วย โฟกัสอยู่บนแกน Y และมีจุดกำเนิดเป็นจุดศูนย์กลาง

ก. $4x^2 + y^2 - 1 = 0$

ข. $2x^2 + y^2 - 1 = 0$

ค. $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$

ง. $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$

11. สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1, -2)$ และผ่านจุด $(-3, 2)$ ตรงกับข้อใด

ก. $x^2 + y^2 + 2y + 9 = 0$

ข. $x^2 + y^2 + 2y - 7 = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 2x + 9 = 0$

ง. $x^2 + y^2 + 2x - 7 = 0$

12. ไฮเพอร์โบล่าที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(3, 2)$ และ $(3, -4)$ โฟกัสหนึ่งอยู่ที่ $(3, -6)$ มีสมการตรงกับข้อใด

ก. $\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$

ข. $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$

ค. $\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1$

ง. $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$

13. ค่าของ k ในข้อใดที่ทำให้สมการวงกลม $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k - 10 = 0$ มีรัศมีเท่ากับ 5 หน่วย

ก. -26

ข. -15

ค. 15

ง. 26

14. กำหนดให้ $25x^2 + 9y^2 = 225$ เป็นสมการวงรี แล้วโฟกัสทั้งสองของวงรีนี้คือข้อใด

ก. $(0, -8)$ และ $(0, 8)$

ข. $(-8, 0)$ และ $(8, 0)$

ค. $(0, -4)$ และ $(0, 4)$

ง. $(-4, 0)$ และ $(4, 0)$

15. พาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(1, 2)$ และมีเส้นตรง $y = 4$ เป็นเส้นไดเรกทริกซ์ ไม่ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

ก. $(3, 1)$

ข. $\left(2, \frac{7}{4}\right)$

ค. $(-1, 1)$

ง. $\left(-2, \frac{7}{4}\right)$

**แบบสอบถามความพึงพอใจที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้
วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra**

คำชี้แจง : แบบสอบถามชุดนี้สร้างขึ้นมาเพื่อศึกษาความพึงพอใจที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra ซึ่งมี 3 ตอน ประกอบด้วย

ตอนที่ 1 ข้อมูลทั่วไปของผู้ตอบแบบสอบถาม

ตอนที่ 2 ความพึงพอใจที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

ตอนที่ 3 ข้อเสนอแนะอื่นๆ

ตอนที่ 1 ข้อมูลทั่วไป โปรดทำเครื่องหมาย ลงในช่องที่ตรงกับความจริง
เพศ ชาย หญิง

ตอนที่ 2 ความพึงพอใจที่มีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

โปรดทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องว่าง ตามระดับความพึงพอใจของนักเรียน ดังนี้

5 หมายถึง ความพึงพอใจอยู่ในระดับมากที่สุด

4 หมายถึง ความพึงพอใจอยู่ในระดับมาก

3 หมายถึง ความพึงพอใจอยู่ในระดับปานกลาง

2 หมายถึง ความพึงพอใจอยู่ในระดับน้อย

1 หมายถึง ความพึงพอใจอยู่ในระดับน้อยที่สุด

รายการประเมิน	ระดับความพึงพอใจ				
	5	4	3	2	1
ด้านกิจกรรมการเรียนการสอน					
1.1 โปรแกรมใช้ง่าย และทำให้เข้าใจมากขึ้น					
1.2 โปรแกรมสวยงาม และดึงดูดความสนใจ					
1.3 การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเน้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรม					
1.4 การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนส่งเสริมให้นักเรียนได้พัฒนาการคิด					
1.5 การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนสนับสนุนให้นักเรียนได้อภิปราย ซักถาม และแสดงความคิดเห็น					
ด้านประโยชน์ที่ได้รับ					
2.1 นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาได้ง่ายขึ้น					
2.2 นักเรียนเกิดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาที่แตกต่างจากเดิม					
2.3 นักเรียนเกิดกระบวนการคิด					

รายการประเมิน	ระดับความพึงพอใจ				
	5	4	3	2	1
2.4 นักเรียนมีการคิดอย่างเป็นขั้นตอน					
2.5 นักเรียนสามารถถ่ายทอดแนวคิดได้อย่างเป็นขั้นตอน					
2.6 นักเรียนลดเวลาในการทำข้อสอบ					
ด้านบรรยากาศการจัดการเรียนรู้					
3.1 นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการเรียน					
3.2 นักเรียนเรียนรู้อย่างมีความสุข					
3.3 นักเรียนอยากตอบปัญหาในกิจกรรมการเรียนรู้					
3.4 นักเรียนได้ร่วมแสดงความคิดเห็นในห้องเรียน					

ตอนที่ 3 ข้อเสนอแนะอื่นๆ

.....

.....

.....

.....

.....



ภาคผนวก ค
คุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล



ตารางที่ 5 การประเมินแผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยใช้

วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

รายการประเมิน	ผู้เชี่ยวชาญคนที่			ค่าเฉลี่ย	แปลผล
	1	2	3		
สาระการเรียนรู้					
1. เหมาะสมกับเวลา	5	5	4	4.67	เหมาะสมมากที่สุด
2. มีความยากง่ายพอเหมาะ	5	5	4	4.67	เหมาะสมมากที่สุด
3. น่าสนใจและเป็นประโยชน์ต่อการเรียน	5	5	5	5.00	เหมาะสมมากที่สุด
สาระสำคัญ					
4. สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ในหลักสูตร	5	5	5	5.00	เหมาะสมมากที่สุด
5. สอดคล้องกับสาระการเรียนรู้	5	5	5	5.00	เหมาะสมมากที่สุด
6. ภาษาที่ใช้มีความชัดเจน เข้าใจง่าย	5	5	4	4.67	เหมาะสมมากที่สุด
จุดประสงค์การเรียนรู้					
7. สอดคล้องกับผลการเรียนรู้	5	5	4	4.67	เหมาะสมมากที่สุด
8. ภาษาที่ใช้มีความชัดเจน เข้าใจง่าย	5	5	4	4.67	เหมาะสมมากที่สุด
9. ระบุพฤติกรรมที่ต้องการวัดได้อย่างชัดเจน	5	5	4	4.67	เหมาะสมมากที่สุด
การจัดกิจกรรมการเรียนรู้					
10. ได้รับความสนใจผู้เรียน	5	5	4	4.67	เหมาะสมมากที่สุด
11. สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้	5	5	5	5.00	เหมาะสมมากที่สุด
12. เหมาะสมกับเวลาที่สอน	5	5	4	4.67	เหมาะสมมากที่สุด
13. กิจกรรมมีลำดับขั้นตอนจากง่ายไปยาก	5	5	4	4.67	เหมาะสมมากที่สุด
14. ผู้เรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรม	5	5	5	5.00	เหมาะสมมากที่สุด
15. เหมาะสมกับวัยและวุฒิภาวะของผู้เรียน	5	5	5	5.00	เหมาะสมมากที่สุด
สื่อการเรียนการสอน					
16. สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้	5	5	5	5.00	เหมาะสมมากที่สุด
17. สอดคล้องกับสาระการเรียนรู้	5	5	5	5.00	เหมาะสมมากที่สุด
18. ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการใช้สื่อ	5	5	5	5.00	เหมาะสมมากที่สุด
19. เหมาะสมกับระดับชั้น และวัยของผู้เรียน	5	5	4	4.67	เหมาะสมมากที่สุด
20. สอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนรู้	5	5	4	4.67	เหมาะสมมากที่สุด
การวัดและประเมินผล					
21. สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้	5	5	5	5.00	เหมาะสมมากที่สุด
22. สอดคล้องกับสาระการเรียนรู้	5	5	5	5.00	เหมาะสมมากที่สุด
23. ใช้เครื่องมือวัดผลได้เหมาะสม	5	5	4	4.67	เหมาะสมมากที่สุด
โดยรวมเฉลี่ย	5.00	5.00	4.48	4.83	เหมาะสมมากที่สุด

ตารางที่ 6 การประเมินความสอดคล้อง (IOC) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชา
คณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยผู้เชี่ยวชาญ

ข้อสอบข้อที่	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่าเฉลี่ย	สรุปผลการประเมิน
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
1	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
2	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
3	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
4	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
5	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
6	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
7	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
8	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
9	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
10	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
11	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
12	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
13	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
14	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
15	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
16	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
17	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
18	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
19	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
20	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
21	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
22	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
23	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง

ตารางที่ 7 การวิเคราะห์ค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	การแปลผล
1	0.76	0.55	ใช้ได้
2	0.76	0.28	ใช้ได้
3	0.79	0.48	ใช้ได้
4	0.76	0.28	ใช้ได้
5	0.76	0.41	ใช้ได้
6	0.76	0.28	ใช้ได้
7	0.72	0.35	ใช้ได้
8	0.76	0.38	ใช้ได้
9	0.79	0.35	ใช้ได้
10	0.76	0.41	ใช้ได้
11	0.76	0.28	ใช้ได้
12	0.76	0.41	ใช้ได้
13	0.79	0.35	ใช้ได้
14	0.67	0.41	ใช้ได้
15	0.66	0.48	ใช้ได้

ค่าความเชื่อมั่นทั้งฉบับของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีค่าเท่ากับ 0.62

ตารางที่ 8 การประเมินความสอดคล้อง (IOC) ของข้อคำถามความพึงพอใจกับการจัดการเรียนการสอนในแต่ละด้าน เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หลังใช้วิธีการสอนแบบ KWDL ร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

ข้อสอบข้อที่	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่าเฉลี่ย	สรุปผลการประเมิน
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
1	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
2	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
3	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
4	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
5	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
6	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
7	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
8	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
9	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
10	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
11	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
12	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
13	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
14	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
15	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
16	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
17	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
18	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
19	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
20	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
21	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
22	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง
23	+1	+1	+1	+3	+1	สอดคล้อง

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล นางสาวพนันท์ วัชรโรทัย
วัน เดือน ปี เกิด 11 มกราคม 2536
สถานที่เกิด ประจวบคีรีขันธ์

